Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

ЧУВАШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. Н. УЛЬЯНОВА

Факультет математический
Кафедра математического моделирования

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

на тему:

"Исследование математических моделей имитации конфликтов"

Дипломник Артемьев Эдуард Иосифович

Научные руководители д. ф. - м. н., проф. Артемьев И. Т., ст. преп. Филиппов В. И.

Заведующий кафедрой д. ф. - м. н., проф. Артемьев И. Т.

Рецензент к. ф. - м. н., доц. Миронов П. Г.

г. Чебоксары - 1998 г.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Введение.

В настоящее время пользуются популярностью методы математического моделирования в экологии, социологии, биологии, медицине, химии и многих других областях человеческой деятельности. Особый интерес вызывают в современных условиях вопросы прогнозирования конфликтов. Конфликты возникают между особями одной популяции, но еще более актуальны конфликты между популяциями, особенно, когда их несколько. Нетрудно обобщить эту проблему и на военные конфликты между противостоящими друг другу боевыми соединениями человечества.

В данной работе рассматриваются математические модели имитации конфликтов основанные на системах дифференциальных уравнений. Нас интересовало качественное развитие конфликтов: выживание, вымирание, равновесие, колебание численности. В общем, прогнозирование динамики численности популяций. Поэтому основной упор делается на численном решении и графической интерпретации. Однако для большинства примеров приведены аналитические решения.

Настоящая работа является попыткой создания элементарного справочника по простейшим моделям имитаций конфликтов, хотя и не претендует на это.

Дипломник выражает глубокую признательность своим научным руководителям: профессору Артемьеву И.Т. и старшему преподователю Филиппову В.И. за предоставленную ему возможность войти в интересный курс моделирования конфликтов.

С уважением Артемьев Э.
17.06.98.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Уравнение Мальтуса.

Изменение общего количества живых особей в популяции с рождаемостью и смертностью - один из важнейших вопросов экологии популяции. Если считать популяцию изолированной, ресурсы питания неограниченными, а прирост поголовья пропорциональным количеству взрослых особей, то динамика численности популяции описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon * x \qquad (1)$$

где $x(t)$- численность популяции в момент времени t, ε - коэффициент прироста популяции. Решением этого уравнения является функция

$$x(t) = x(t_0) * e^{\varepsilon*(t-t_0)} \qquad (2)$$

$x(t_0)$ - численность популяции в начальный момент времени. Из (2) следует, что численность поголовья растет неограниченно. Разумеется ни в одной реально существующей популяции такой рост не наблюдается. Уравнение (1) имеет смысл либо в теоретическом аспекте, либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции. Величина ε при этом называется специфической (врожденной) скоростью естественного увеличения популяции. Уравнение (1) впервые получил в 1802 году Мальтус. Его заблуждение заключается в том, что уравнение справедливое для узкого класса популяций, он считал универсальным законом не только для всей природы, но и для человеческого общества.

Действительно, при $t_0=0$ решение (2) уравнение (1) имеет вид

$$x = x_0 * e^{\varepsilon t}. \qquad (3)$$

Поскольку при $\varepsilon>0$ функция $x_0*e^{\varepsilon t}$ стремится к бесконечности при $t\to\infty$, то и число особей данного вида будет стремиться к бесконечности. Например, легко подсчитать, что потомство одной пары мух за два года при беспрепятственном размножении имело бы массу, превосходящую массу Земли. В действительности столь быстрый рост не наблюдается, хотя известны случаи, когда некоторые виды животных и растений, попав в благоприятные условия, размножались настолько быстро, что становились бедствием (кролики в Австралии,

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

водяной гиацинт в реках США и т.д.).

Основным фактором, характерезующим данную модель следует считать пропорциональность скорости роста численности популяции самому числу особей: чем больше особей, тем больше они принесут приплода; и чем больше особей, тем большее их количество умрет за единицу времени.

В общем случае следует рассматривать число особей $A(x,t)$ в популяции рождающихся за единицу времени, и $B(x,t)$ - число особей умирающих за единицу времени. Тогда с достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения численности $x(t)$ со временем задается формулой

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t) - B(x,t). \qquad (4)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы описать зависимость $A(x,t)$ и $B(x,t)$. Простейшей является рассмотренная выше ситуация когда

$$A = a*x, \quad B = b*x, \qquad (5)$$

где a и b - коэффициенты рождения и смерти особей в единицу времени соответственно. Дифференциальное уравнение (4) переписывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = (a-b) * x \qquad (6)$$

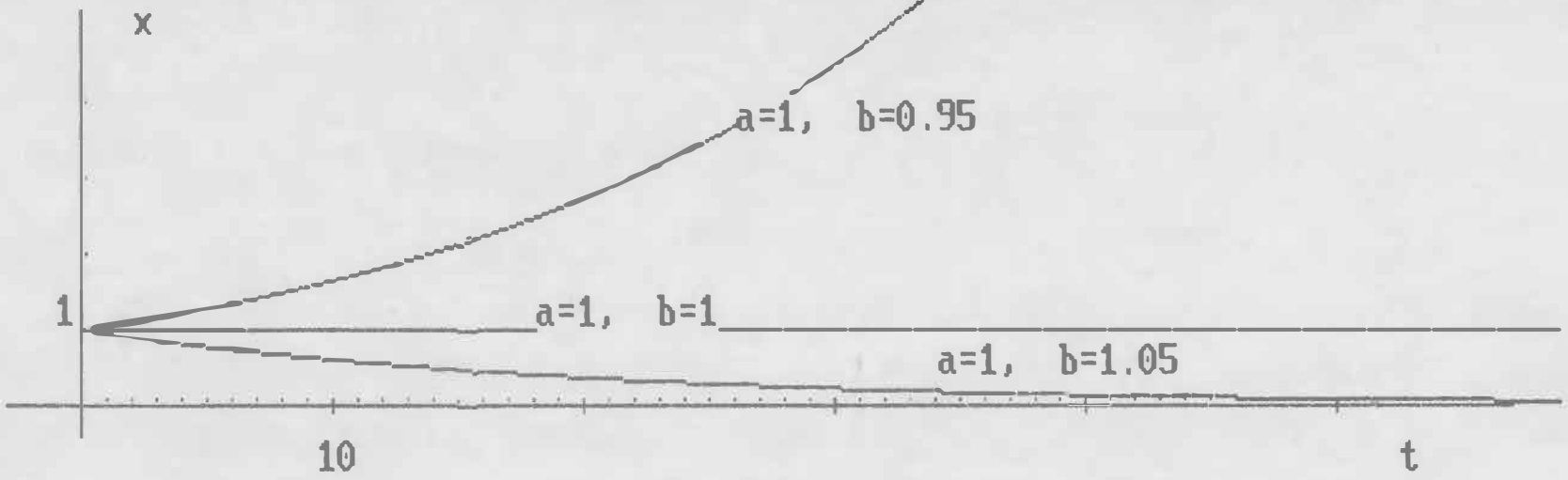
или в виде (1), где $\varepsilon=a-b$.

Естественно при $a>b$ имеем эффект показательного роста численности популяции. Если же $a<b$, т.е. $\varepsilon<0$, то численность популяции экспоненциально стремится к нулю при $t\to\infty$, т.е. популяция становится вымирающей.

Обобщая уравнение (4), заметим, что практически все модели, которые описывают реальные явления и процессы, нелинейны, и вместо дифференциального уравнения (1) следует рассматривать уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

где $f(x)$ - нелинейная функция, например, как в следующем параграфе.



Уравнение Мальтуса.

Если считать популяцию изолированной, ресурсы питания неограниченными, а прирост и смертность поголовья - пропорциональными количеству взрослых особей, то динамика численности популяций описывается дифференциальным уравнением Мальтуса: $dx/dt = (a-b)*x$, где $x(t)$ - численность популяции в момент времени t, a и b - коэффициенты рождаемости и смертности особей в единицу времени. Решением этого уравнения является функция $x(t)= Xo*exp((a-b)*t)$, где Xo - численность популяции в начальный момент времени. При $a>b$ численность особей неограниченно растет, а при $a<b$ - популяция убывает до нуля при увеличении t. Разумеется, в реальных условиях неограниченный рост числленности не наблюдается. Мальтус предложил такое уравнение в 1802 году. Его заблуждение заключалось в том, что он считал данный закон универсальным для всей природы и для человеческого общества.

Здесь мы видим графики развития численности популяции на основе аналитического решения. Если коэффициент рождаемости a превышает коэфициент смертности, то популяция неограниченно увеличивается. Если $a<b$, то популяция вымирает.

ПЛАКАТ

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Уравнение Ферхюльста-Перла.

Более точное описание развития популяции дает уравнение Ферхюльста-Перла, полученное в 1845 году. Оно учитывает так называемый "эффект самоотравления" популяции, или попросту внутривидовую борьбу в популяции. Внутривидовая борьба объясняется многими причинами: конкурентной борьбой за место и пищу, распространением инфекции из-за тесноты и т.д. Желая учесть этот эффект, мы должны при подсчете прироста Δx от $\varepsilon*x*\Delta t$ вычесть некоторую величину $b(x,\Delta t)$:

$$\Delta x = \varepsilon*x*\Delta t - b(x,\Delta t).$$

Функция $b(x,\Delta t)$ для многих популяций может быть взята в виде произведения:

$$b(x,\Delta t) = \delta*x^2*\Delta t, \qquad \delta = \text{const}$$

Наличие множителя x^2 обосновывается следующим образом. Величина $-b(x,\Delta t)$ отражает снижение скорости роста популяции из-за внутривидовой конкуренции. Итак $\Delta x=\varepsilon*x*\Delta t-\delta*x^2*\Delta t$. Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ получим:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon*x - \delta*x^2, \quad \varepsilon>0, \ \delta>0.$$

Это уравнение Ферхюльста-Перла. δ - коэффициент самоотравления или коэффициент внутривидовой конкуренции. Вынесем за скобки $\varepsilon*x$ и получим:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon * x * \left[1- \frac{\delta}{\varepsilon} * x\right]$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon * x * \left[\frac{\frac{\varepsilon}{\delta} - x}{\frac{\varepsilon}{\delta}}\right].$$

Обозначив $\frac{\varepsilon}{\delta}=h$ получим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon * x * \left[\frac{h - x}{h}\right]. \qquad (1)$$

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Если начальное значение $x(t_0)=x_0<h$, то для всех моментов времени $t>t_0$, $x(t)<h$, $x(t)$ – непрерывная функция.

Из (1) при $x(t)<h$ следует, что производная $\frac{dx}{dt}$ положительна и следовательно $x(t)$ растет.

Разделив переменные в уравнении (1), получим:

$$\frac{h * dx}{x*(h-x)} = \varepsilon * dt$$

или

$$\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{h-x}\right] * dx = \varepsilon * dt.$$

Считая $x<h$, проинтегрируем последнее уравнение:

$$\ln x - \ln(h-x) = \varepsilon*t + \ln C,$$

или

$$\frac{x}{h-x} = C * e^{\varepsilon*t}. \qquad (2)$$

Пусть при $t=t_0=0$ $x(0)=x_0<h$.

Подставив в (6) найдем $C = \frac{x_0}{h-x_0}$.

Подставив это значение C в (2) получим:

$$\frac{x}{h-x} = \frac{x_0}{h-x_0} * e^{\varepsilon*t}.$$

Откуда получим решение в виде

$$x(t) = \frac{x_0*h*e^{\varepsilon*t}}{h-x_0+x_0*e^{\varepsilon*t}} \qquad (3)$$

Если $h>0$, то производная $x'(t)$ всюду положительна. Дифференцируя (1) получим:

$$x''(t) = \left[\varepsilon*\frac{h-x}{x} - \frac{\varepsilon*x}{h}\right]*x'(t) = \varepsilon*\left[1-\frac{2*x}{h}\right]*x'(t).$$

Подставив сюда выражение x из (3) получим:

$e^{\varepsilon t}$

$$x''(t) = \varepsilon * \left[\frac{h - x_0 - x_0 * \varepsilon^{e*t}}{h - x_0 + x_0 * e^{\varepsilon * t}} \right] * x'(t) \qquad (4)$$

При $h-x_0-x_0*e^{\varepsilon t}<0$, $x''(t)<0$, следовательно $x(t)$ вогнута.
При $h-x_0-x_0*e^{\varepsilon t}>0$, $x''(t)>0$, следовательно $x(t)$ выпукла.
Находим область выпуклости:

$$h-x_0-x_0*e^{\varepsilon*t}>0$$

т.е.

$$e^{\varepsilon*t} < \frac{h-x_0}{x_0}$$

Следовательно

$$0 < t < \frac{1}{\varepsilon} * \ln \frac{h_0-x_0}{x_0} \quad \text{- область выпуклости,}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} * \ln \frac{h_0-x_0}{x_0} < t < +\infty \quad \text{- область вогнутости.}$$

$$M = \left[\frac{1}{\varepsilon} * \ln \frac{h_0-x_0}{x_0}, \frac{h}{2} \right] \quad \text{- точка перегиба.}$$

Если в начальный момент времени популяция была небольшой $\left[x_0 < \frac{h}{2}\right]$, то развитие идет по выпуклой кривой до точки M. Меняя кривизну в этой точке, кривая стремится к прямой $x(t)=h$, нигде не достигая этой прямой (по асимптоте). Величина h называется максимальной численностью популяции возможной при данных условиях.

На основе модели Ферхюльста-Перла можно рассмотреть более общие задачи, например: в случае неизолированной популяции:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon*x-\delta*x^2+N-M.$$

Здесь:
N - приток извне N особей в единицу времени, за счет искусственной подсадки или за счет миграции);
M - численность особей покидающих данную популяцию, за счет отлова или за счет отселения. Можно истреблять постоянную величину, M=const, но можно и величину пропорциональную наличной численности ($M=\alpha*x$). Можно охотиться посезонно, тогда следует принять $M=a(t)$.

В целом легко заметить, что скорость размножения популяции в модели Ферхюльста-Перла

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

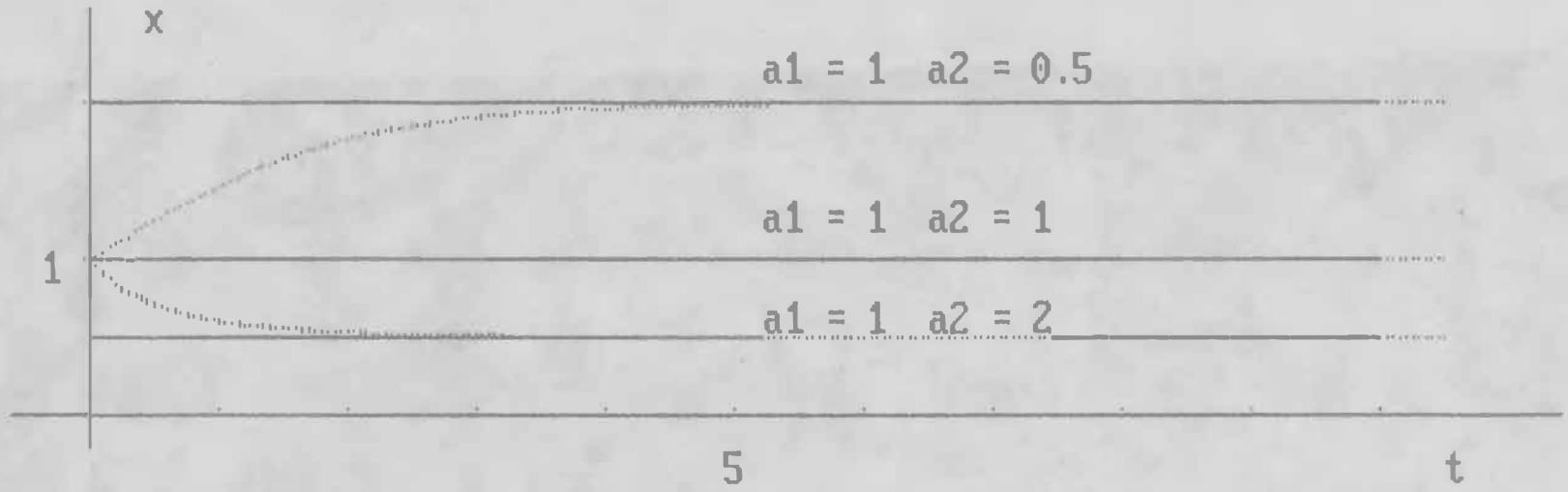
$$\frac{dx}{dt} = \alpha * x - \delta * x^2$$

при $\alpha>0$, $\delta>0$ увеличивается с увеличением коэффициента рождаемости α и уменьшается с увеличением коэффициента самоотравления δ. Заметим, что решение (3) можно переписать в виде

$$x(t) = \frac{x_0 * h}{x_0 + (h - x_0) * e^{-\varepsilon * t}}.$$

Отсюда легко заметить, что при $t \to \infty$ в популяции $x(t) \to \frac{\varepsilon}{\delta}$. При этом возможны два случая: $\frac{\varepsilon}{\delta} > x_0$ и $\frac{\varepsilon}{\delta} < x_0$. Различие между этими случаями в том, что в первом случае при $t \to \infty$ численность популяции возрастает, но не беспредельно, а до значения $h = \frac{\varepsilon}{\delta}$ и превосходящего x_0. Во втором случае численность убывает, но не до нуля, а до значения $h = \frac{\varepsilon}{\delta}$, которое меньше первоначального x_0. В обоих случаях численность стремится к предельному значению асимптотически.

Программа численного решения приведена ниже. Далее приведены графические иллюстрации численного решения, интерпретирующие развитие популяции по модели Ферхюльста-Перла.



Дифференциальные модели в экологии.

x(t) - число особей в популяции в момент времени t
dx/dt - скорость изменения численности популяции
a1 >0 - коэффициент рождаемости особей популяции
a2 >0 - коэффициент смертности особей популяции

Дифференциальное уравнение развития популяции

dx/dt = a1*x - a2*x^2

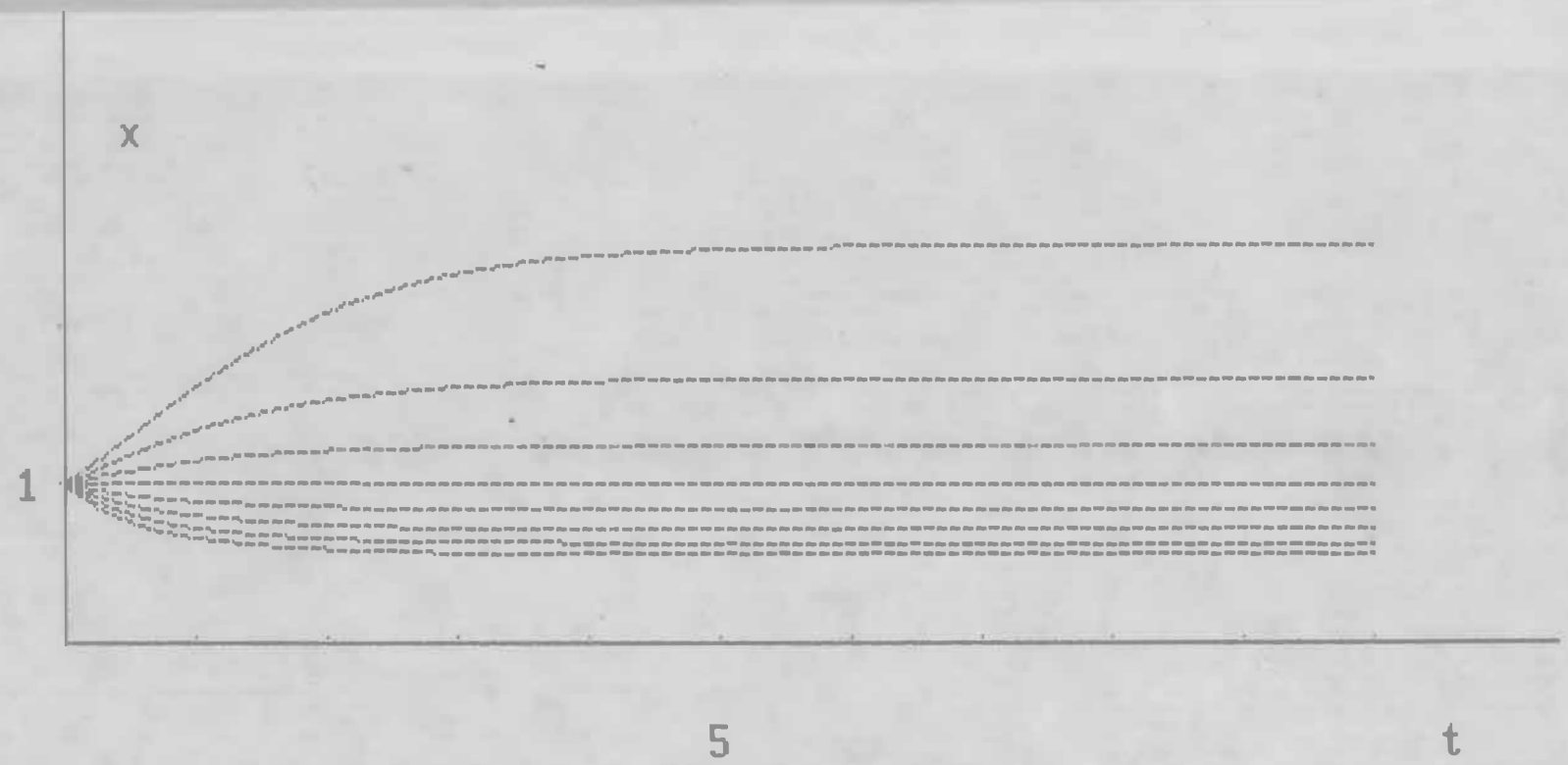
Уравнение решается методом Эйлера, а также строится точное решение этого диффуравнения, имеющее вид

x(t) = xo*(a1/a2) / (xo+(a1/a2-xo)*EXP(-a1 * t))

Графики точного и приближенного решений сливаются!

Эффект самоотравления приводит к ограниченному росту или вырождению численности популяции с ассимптотой a1/a2

Модель описывает развитие фруктовых вредителей и некоторых видов бактерий.



Графики зависимости численности популяции с учетом самоотравления при различных значениях коэффициента самоотравления 0.4 < a2 < 2.0 при a1=1 методом Эйлера

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Модель Полетаева.
(Почему деревья имеют ограниченную высоту)

В данном параграфе рассмотрим модель, описывающую динамику роста деревьев. Обратим внимание на тот факт, что в этой модели дифференциальное уравнение роста деревьев имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = a - b*x^2,$$

т.е. практически совпадает с уравнением Ферхюльста-Перла. Исходя из опыта предыдущих моделей можно сказать, что при b=0 мы получили бы модель неограниченного роста дерева с начальным размером x_0 при $t_0=0$:

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \text{и} \quad x(t) = x_0+a*t,$$

где a - коэффициент затрат энергии дерева на рост. Но коэффициент $b\neq0$, очевидно учитывает борьбу за существование (добычу, доставку энергии и пр.). В этом смысле задача подобна задаче о самоотравлении и мы можем делать вывод об ограниченности размеров деревьев.

Рассматриваемая модель основывается на следующих гипотезах:

1) Зрелое растение в процессе роста сохраняет подобие. Это значит, что у зрелого растения с ростом не меняется отношение геометрических размеров, например: отношение высоты к диаметру.

2) Свободную энергию растение получает только путем фотосинтеза.

3) Свободная энергия расходуется на фотосинтез, на построение живой ткани. И на подъем раствора из почвы.

4) В среднем за большие отрезки времени растение получает постоянное количество света на единицу площади поверхности и может поглощать необходимые вещества из неограниченного запаса.

Составим уравнение баланса энергии. Пусть x - линейный размер растения. Площадь поверхности листьев прямо пропорциональна x^2. Объем растения прямо пропорционален x^3.

Уравнение баланса энергии

$$\alpha*x^2 = \beta*x^3 + \gamma*x^4 + \delta*\frac{d}{dt}(\rho*x^3). \qquad (1)$$

$\alpha*x^2$ - энергия, образуемая благодаря фотосинтезу в зеленой части растения.

$\beta*x^3$ - энергия, затрачиваемая на нужды самого процесса фотосинтеза.

$\gamma*x^4$ - энергия, затрачиваемая на транспортировку питательного раствора во все части растения (точнее $\gamma*x^3*x$).

$\delta*\frac{d}{dt}(\rho*x^3)$ - расход энергии на увеличение массы растения ($m=\rho*x^3$), этот расход прямо пропорционален скорости роста (скорость изменения массы).

После деления на $3*\delta*\rho*x^2$ из (1) получим

$$\frac{dx}{dt} = a - b*x^2, \qquad (2)$$

где

$$a = \frac{\alpha-\beta}{3*\delta*\rho} > 0, \quad b = \frac{\gamma}{3*\delta*\rho} > 0.$$

Т.к. дерево растет, то $\frac{dx}{dt}>0$. Следовательно $a-b*x^2>0$.

Проинтегрируем (2)

$$\ln\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = 2 * \sqrt{a*b} * (t-t_0),$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} * \frac{1-e^{-2*\sqrt{a*b}*(t-t_0)}}{1+e^{-2*\sqrt{a*b}*(t-t_0)}}. \qquad (3)$$

Формула дает кривую роста дерева. Если известны a и b, то по этой формуле можно подсчитать рост дерева данной породы в зависимости от возраста.

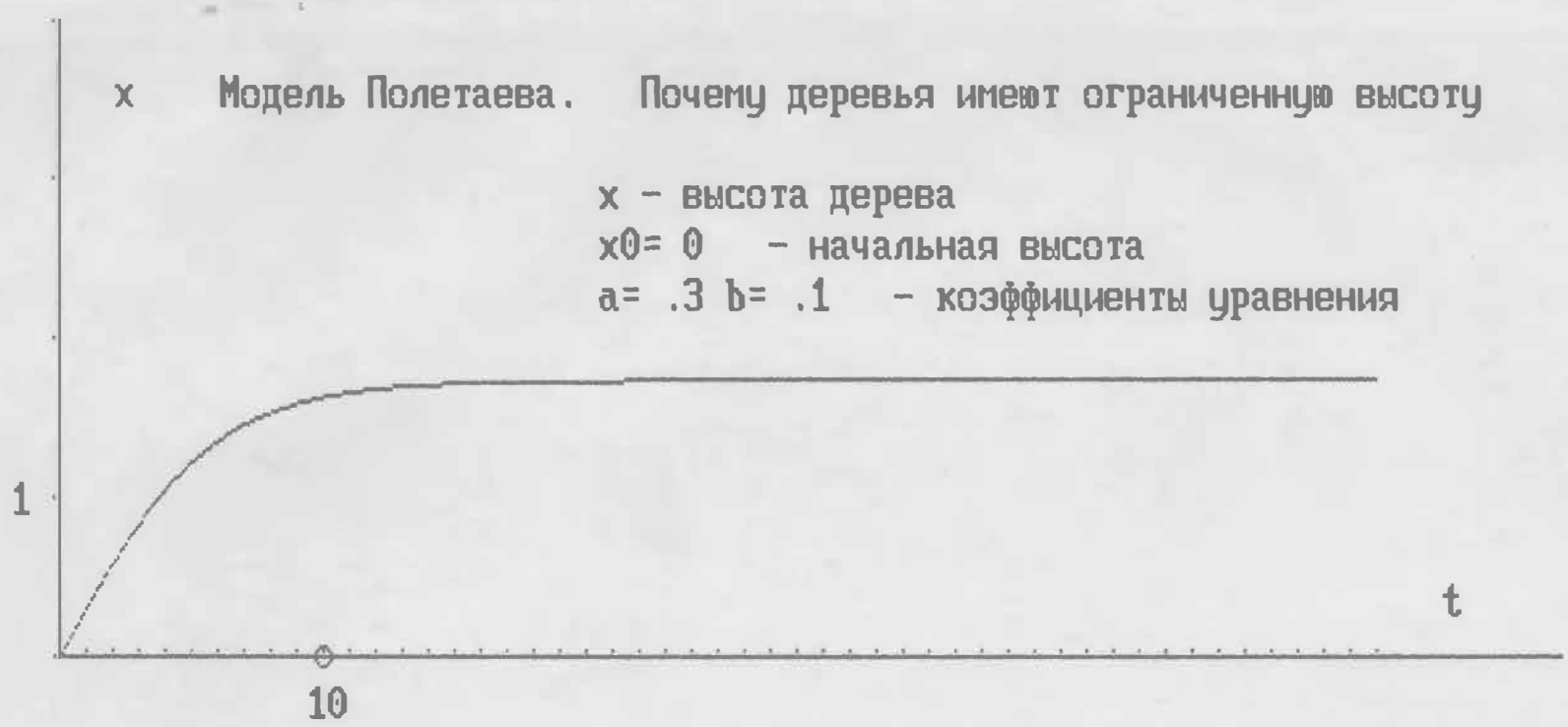
Дифференцируя (2), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2*b*x.$$

Т.к. $x(t)>0$, то $\frac{d^2x}{dt^2}<0$. Как видим скорость роста дерева с течением времени уменьшается.

Равенство $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$, при котором $\frac{dx}{dt}=0$, соответствует случаю, когда вся поступающая энергия идет на обеспечение нужд процесса фотосинтеза и на транспортировку питательного раствора. Дерево при этом не растет.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.



Модель Полетаева роста деревьев описывается дифференциальным уравнением $dx/dt=a-b*x^2$, $x(0)=x0$ (=0). Здесь, в отличие от модели Ферхюльста -Перла, первое слагаемое в правой части уравнения является константой, что определяет ненулевую скорость роста даже при нулевой высоте дерева.

Высота дерева асимптотически стремится к предельной, при которой энергетические затраты на фотосинтез и работу 'насоса' равны энергии, полученной за счет фотосинтеза. На приращение массы энергии не остается.

Для определения предельной высоты приравняем нулю скорость роста и решим уравнение $a-b*x^2=0$. Получим значение $(a/b)^{0.5}$

```
'...                                        ...
'Модель Полетаева
'Почему деревья имеют ограниченную высоту
'x(t) - высота дерева

GOSUB 1000 'Подпрограмма построения системы координат

'правая часть уравнения Полетаева
DEF fnfx (x) = a - b * x ^ 2

dt = .1      'время конечное и приращение времени

t = 0: x = 0          'начальные условия
x1 = x                'для вывода начальных данных
a = .3          '
b = .1          '

'Метод Рунге-Кутта четвертого порядка
'численного решения дифференциального уравнения

FOR i = 1 TO 500              'цикл изменения времени
t = t + dt
kx1 = fnfx(x) * dt
kx2 = fnfx(x + kx1 / 2) * dt
kx3 = fnfx(x + kx2 / 2) * dt
kx4 = fnfx(x + kx3) * dt
'приращение высоты дерева
dx = (kx1 + 2 * kx2 + 2 * kx3 + kx4) / 6
x = x + dx                          'новая высота дерева
PSET (t0 + t * mt, x0 - x * mx)  'точка графика высоты дерева
NEXT i



'Вывод комментариев и начальных данных
LOCATE 2, 15: PRINT "Модель Полетаева."
LOCATE 2, 35: PRINT "Почему деревья имеют ограниченную высоту"
LOCATE 3, 33: PRINT ""
LOCATE 4, 33: PRINT "x - высота дерева"
LOCATE 5, 33: PRINT "x0="; x1; "  - начальная высота"
LOCATE 6, 33: PRINT "a="; a; "b="; b; "  - коэффициенты уравнения"

GOSUB 3000

END

1000 : 'Подпрограмма построения системы координат t
SCREEN 12                'графический экран
mt = 10: mx = 50         'масштаб: пикселей в единице
t0 = 50: x0 = 200        'начало координат в пикселях на экране

LINE (t0, x0)-(620, x0)        'координатные оси
LINE (t0, x0)-(t0, x0 - 10 * mx)

'разметка и обозначение осей xt
FOR t = 1 TO 50
PSET (t0 + t * mt, x0 - 2)
IF ABS(t - 10) < .02 THEN CIRCLE (t0 + t * mt, x0), 3
NEXT t

FOR x = 0 TO 7 STEP 1
```

```
PSET (t0 - 2, x0 - x * mx)
NEXT x

LOCATE 12, 73: PRINT "t"
LOCATE 2, 10: PRINT "x"
LOCATE 14, 19: PRINT "10"
LOCATE 10, 5: PRINT "1"
RETURN


3000 :                    'подпрограмма вывода комментариев
LOCATE 17, 2: PRINT "  Модель Полетаева роста деревьев опис"
LOCATE 17, 40: PRINT "ывается дифференциальным уравнением  "
LOCATE 18, 2: PRINT " dx/dt=a -b*x^2, x(0)= x0 (=0).       "
LOCATE 18, 40: PRINT "Здесь, в отличие от модели Ферхюльста"
LOCATE 19, 2: PRINT "-Перла, первое слагаемое в правой част"
LOCATE 19, 40: PRINT "и уравнения является константой, что "
LOCATE 20, 2: PRINT "определяет ненулевую скорость роста   "
LOCATE 20, 40: PRINT "даже при нулевой высоте дерева.      "
LOCATE 21, 2: PRINT "   Высота дерева асимптотически стреми"
LOCATE 21, 40: PRINT "тся к предельной, при которой энерге-"
LOCATE 22, 2: PRINT "тические затраты на фотосинтез и работ"
LOCATE 22, 40: PRINT "у 'насоса' равны энергии, полученной "
LOCATE 23, 2: PRINT "за счет фотосинтеза. На приращение мас"
LOCATE 23, 40: PRINT "сы энергии не остается."
LOCATE 24, 2: PRINT "   Для определения предельной высоты  "
LOCATE 24, 40: PRINT "приравняем нулю скорость роста и ре- "
LOCATE 25, 2: PRINT "шим уравнение a-b*x^2=0. Получим значе"
LOCATE 25, 40: PRINT "ние (a/b)^0.5                        "
LOCATE 26, 2: PRINT ""
LOCATE 26, 40: PRINT ""
LOCATE 27, 2: PRINT " "
LOCATE 27, 40: PRINT "  "
LOCATE 28, 2: PRINT ""
LOCATE 28, 40: PRINT "  "
RETURN
```


Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Интегро-дифференциальные уравнения в экологии.

Часто популяция при своем развитии испытывает влияние предшествующих состояний популяции, имевших место в течении некоторого периода времени от $t-\tau$ до t. В таком случае скорость развития популяции зависит не только от численности, но и от интеграла, характерезующего влияние предшествующих состояний от $t-\tau$ до t:

$$x'(t) = f\left(x(t), \int_{t-\tau}^{t} K\left[t,\xi,x(\xi)\right]*d\xi \right)$$

Численное решение таких задач намного труднее обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь нас интересует сам процесс моделирования влияния предков на потомство, поэтому рассмотрим упрощение, заключающееся в том, что ядро считается вырожденным:

$$K(t,\xi,x) = \sum_{i=1}^{m} a_i*x(\xi)$$

и $\tau=t$. Например, можно рассмотреть модель Вольтерра (1934 г.)

$$x'(t) = \varepsilon*x - \alpha*x^2 - a*\left(\int_0^t x(\xi)*d\xi \right)*x,$$

описывающее динамику популяции. Здесь интегральный член, описывает уменьшение скорости размножения вследствие загрязнения среды.

Модель Вольтерра.

Модель Вольтерра, учитывает загрязнение среды, произведенное всеми предыдущими поколениями за время от 0 до t:

$$\frac{dx}{dt} = a_1*x - a_2*x^2 - a_3*\left(\int_0^t x(\tau)*d\tau \right)*x$$

Здесь $v=\int_0^t x(\tau)*d\tau$ – интеграл, учитывающий влияние на среду (загрязнение) всех предыдущих поколений за всю историю развития популяции. a_3 – коэффициент влияния на скорость размножения $\frac{dx}{dt}$ загрязнений. Произведение $v*x$ – определяет вероятность встречи особей популяции с фактором загрязнения v.

Поскольку $x(\tau)$ неизвестная функция, то от интегрального уравнения перейдем к дифференциальному путем замен:

$$v=\int_0^t x(\tau)*d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}=x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{dx}{dt}.$$

Тогда имеем

$$\frac{d^2v}{dt^2}=a_1*\frac{dv}{dt}-a_2*\left[\frac{dv}{dt}\right]^2-a_3*v*x$$

или

$$\frac{d^2v}{dt^2}=a_1*x-a_2*x^2-a_3*v*x.$$

Решение этого уравнения производим численно по следующей итерационной схеме:

$t=0$, $x=x_0$, $v=0$, $dt=\varepsilon$,
Начало цикла
  $v''=a_1*x-a_2*x^2-a_3*v*x$,
  $x=x+v''*dt$,
  $v=v+x*dt$,
  Ввод значения x (или v),
  $t=t+dt$,
Конец цикла.

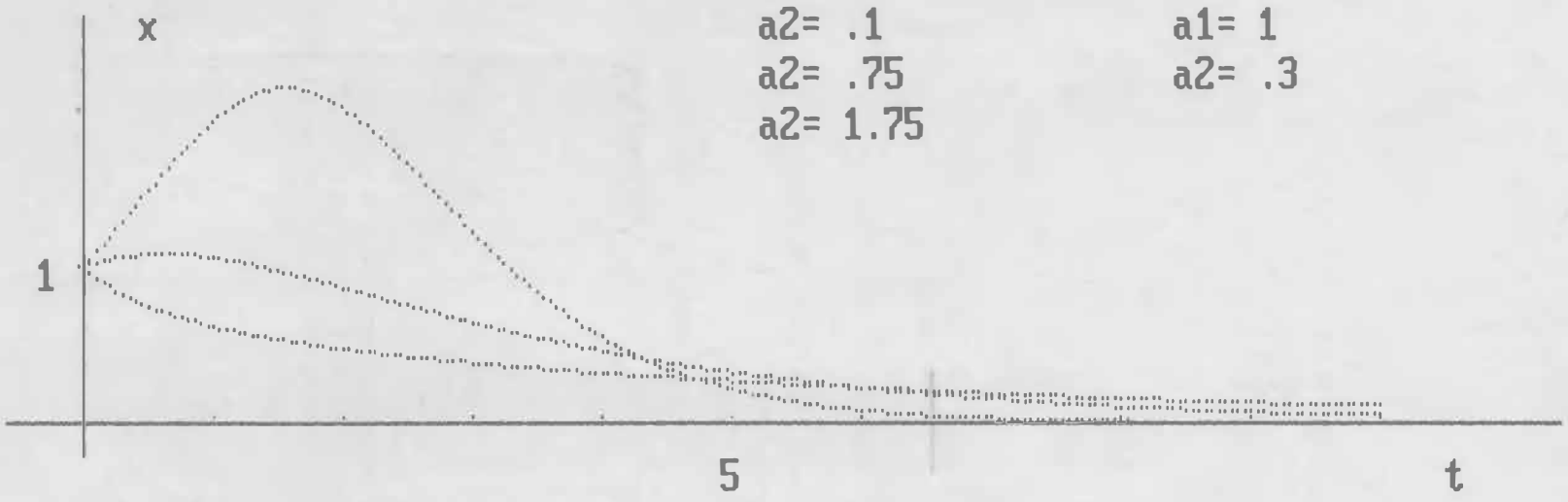
Это метод Эйлера. Он достаточен для качественного описания характера развития популяции.

Из графиков $x(t)$ мы видим, что в модели Вольтерра с учетом загрязнения популяция вымирает асимптотически.

Можно считать, что популяция стремится облагородить среду. При этом знак перед a_3 меняется и популяция развивается с неограниченным ростом численности.

Заметим, что можно учитывать m интегралов, учитывающих различные загрязняющие и отравляющие факторы.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.



Модель Вольтерра с учетом экологии.

x(t) - число особей в популяции в момент времени t

dx/dt - скорость изменения численности популяции

a1 >0 - коэффициент прироста численности популяции

a2 >0 - коэффициент самоотравления популяции

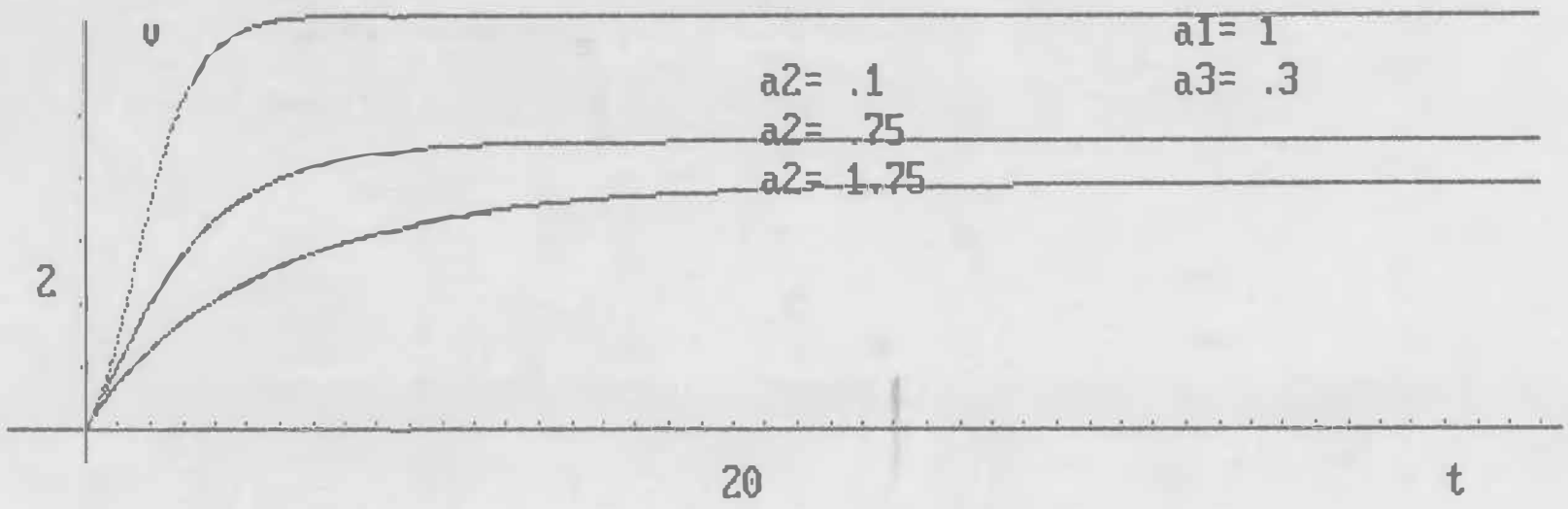
Дифференциальное уравнение развития популяции

$$dx/dt = a1*x - a2*x^2 - a3*v*x$$

Здесь dv/dt=x(t), т.е. v(t) - интеграл отравления.

Функция v(t) характеризует интегральное отравление среды всеми предыдущими поколениями особей за время от 0 до t.

Эффект отравления приводит к вымиранию популяции причем, чем выше скорость размножения особей в начальный период, тем больше отравителей и тем скорее вымирает популяция. a3 - коэффициент ухудшения экологии предыдущими поколениями.



Модель Вольтерра с учетом экологии.

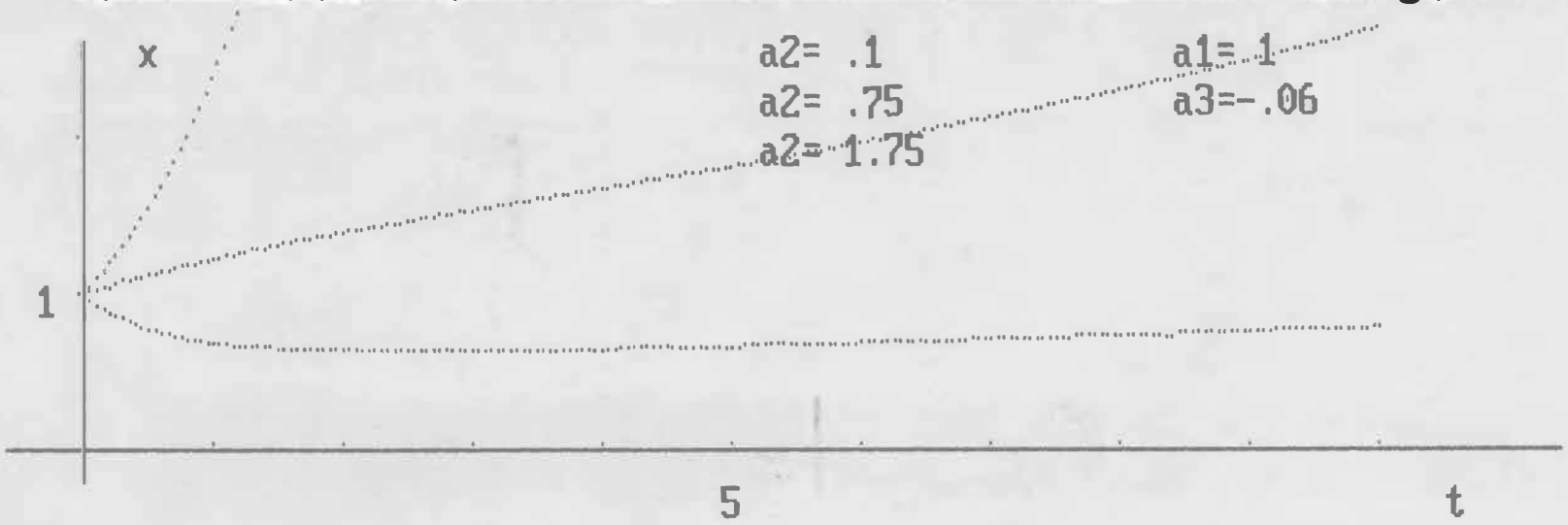
Дифференциальное уравнение развития популяции

$$dx/dt = a1*x - a2*x^2 - a3*v*x$$

Здесь $dv/dt=x(t)$, т.е. $v(t)$ - интеграл отравления.

Функция $v(t)$ является интегралом, учитывающим накопление загрязнений, создаваемых поколениями особей от $t=0$ до рассматриваемого момента времени t. Здесь мы видим графики $v(t)$ при различных параметрах $a2$.

Через определенный момент времени значения интегралов достигают предельных значений. Это можно понимать как тот факт, что загрязнения среды в дальнейшем не накапливаются. Очевидно, они не увеличиваются потому, что загрязнения больше некому создавать. Популяция практически исчезла. Мы говорим 'практически' т.к. численность популяции стремится к нулю асимптотически. Если установить $a3=0$, то перейдем к модели Фер.-Перла.



Модель Вольтерра с учетом улучшения экологии.

Дифференциальное уравнение развития популяции

$$dx/dt = a1*x - a2*x^2 - a3*v*x$$

Здесь $dv/dt=x(t)$, т.е. $v(t)$ - интеграл развития.

Функция $v(t)$ может характеризовать интегральное улучшение среды обитания всеми предыдущими поколениями особей в результате созидательной деятельности.

Эффект созидания приводит к сохранению популяции и даже к неограниченному ее росту впоследствии для тех особей, которые вымирали вначале.

Качественная картина не меняется при различных коэффициентах a1, a2 и при a2=0 , без самоотравления.

Очевидно, созидательной деятельности предков соответствуют отрицательные коэффициенты a3, а отравительной деятельности соответствуют положительные значения коэффициента a3.

```
'
'Модель Вольтерра с интегральным отравлением среды.
'Литература: Э. Хайрер и др. "Решение  ОДУ" стр. 319

SCREEN 12                 'графический экран
mt = 50: mx = 50          'масштаб: сколько пикселей в единице
t0 = 50: x0 = 150         'начало координат в пикселях на экране
DIM am1(3), am2(3)        'массив коэффициентов уравнения
am1(1) = 1:               'коэффициент рождаемости-смертности
am2(1) = .1: am2(2) = .75: am2(3) = 1.75          'самоотравление
xo = 1                    'начальное значение x при t=0 (xo не x0)
tk = 100: dt = .05        'время конечное и приращение времени
vo = 0                    'начальное значение интеграла отравления
a3 = .3                 'коэффициент отравления среда предками
LOCATE 2, 40: PRINT "a2="; .1
LOCATE 3, 40: PRINT "a2="; .75
LOCATE 4, 40: PRINT "a2="; 1.75
LOCATE 2, 60: PRINT "a1="; 1
LOCATE 3, 60: PRINT "a2="; .3


'правая часть диффуравнения - функция пользователя,
'учитывающая прирост, самоотравление и отравление предками
DEF fnfp (x, v, a2) = a1 * x - a2 * x ^ 2 - a3 * v * x

LINE (20, x0)-(620, x0)      'вывод координатных осей
LINE (t0, 20)-(t0, 160)
FOR j = 1 TO 10              'разметка осей штрихами
PSET (t0 + j * mt, x0 - 2)
NEXT j
FOR j = 1 TO 2
PSET (t0 - 2, x0 - j * mx)
NEXT j
LOCATE 11, 73: PRINT "t"     'обозначение осей
LOCATE 2, 10: PRINT "x"
LOCATE 11, 38: PRINT "5"
LOCATE 7, 5: PRINT "1"


' ЦИКЛ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФУРАВНЕНИЯ
' МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА
FOR j = 1 TO 3               'цикл изменения параметра a3
t = 0: x = xo: v = vo        'начальные условия

a2 = am2(j): a1 = am1(1)
FOR i = 1 TO 200                  'цикл изменения времени
t = t + dt
dx = fnfp(x, v, a2) * dt          'приращение количества особей
x = x + dx                   'количество особей в данный момент
v = v + x * dt 'количество загрязнений, оставленных предками (интеграл)
PSET (t0 + t * mt, x0 - x * mx)     'точка графика численности особей
NEXT i
NEXT j

LOCATE 13, 10: PRINT "          Модель Вольтерра с учетом экологии.
LOCATE 14, 10: PRINT "x(t)  - число особей в популяции в момент времени t
LOCATE 15, 10: PRINT "dx/dt - скорость изменения численности популяции
LOCATE 16, 10: PRINT "a1 >0 - коэффициент прироста численности популяции
LOCATE 17, 10: PRINT "a2 >0 - коэффициент самоотравления популяции
LOCATE 18, 10: PRINT "    Дифференциальное уравнение развития популяции
LOCATE 19, 10: PRINT "        dx/dt = a1*x - a2*x^2 -a3*v*x
LOCATE 20, 10: PRINT "Здесь dv/dt=x(t), т.е. v(t) - интеграл отравления.
```

```
LOCATE 21, 10: PRINT "  Функция v(t) характеризует интегральное отравление
LOCATE 22, 10: PRINT "среды всеми предыдущими поколениями особей за время
LOCATE 23, 10: PRINT "от 0 до t.
LOCATE 24, 10: PRINT "   Эффект отравления приводит к вымиранию популяции
LOCATE 25, 10: PRINT "причем, чем выше скорость размножения особей в началь
LOCATE 26, 10: PRINT "ный период, тем больше отравителей и тем скорее выми-
LOCATE 27, 10: PRINT "рает популяция. a3 - коэффициент ухудшения экологии
LOCATE 28, 10: PRINT "предыдущими поколениями.
END

'  Здесь рассматривается модель Вольтерра, учитывающая влияние
'на развитие популяций отравления окружающей среды всеми поколениями,
'жившими до рассматриваемого времени. Это влияние учитывается
'интегралом от нуля до t. Интегрируется произведение численности на
'коэффициент ядро с запаздыванием. Но в данном случае этот коэффициент
'берется постоянным, равным a3. Интеграл обозначен буквой v.
'В целом эффект отравления предками определяется слагаемым  -a3*v*x.
'При любом исходе популяция вымирает асимптотически. Причем, чем
'интенсивней популяция развивается в начальный период, тем круче
'спад ее численности после некоторого промежутка времени.
'   Можно считать коэффициент a3 отрицательным. Это будет соответ-
'ствовать случаю когда предки заботясь о потомках улучшают среду
'обитания. В последнем случае при любой начальной ситуации популяция
'не погибает. И более того - развивается неограниченно.
'   Собственно произведение v*x соответствует вероятности встреч
'особей численностью x с факторами отравления среды, имеющими
'объем v, который оставлен предыдущими поколениями.
'   Аналогично - произведение x*x соответствует вероятности встреч
'особей численностью x друг с другом. Что приводит к самоотравлению.
```

Задача "хищник-жертва".

Если рассматривается несколько сосуществующих видов, например, больших и малых рыб, где малые рыбы являются кормом для больших, то, составляя дифференциальные уравнения для каждого вида, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\dots,x_n), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Рассмотрим более подробно двухвидовую модель "хищник-жертва", которая впервые была построена Вольтерра для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море, имеющих один и тот же период, но отличающихся по фазе.

Пусть x - число больших рыб-хищнико, которые питаются малыми рыбами-жертвами, число которых обозначим через y. Модель построенная Вольтерра, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \alpha*y - \beta*x*y, \\ \frac{dx}{dt} = -\delta*x + \gamma*x*y. \end{cases} \qquad (*)$$

Здесь α, β, γ, δ - некоторые положительные числа. Отметим, что $\frac{dy}{dt}$ -скорость изменения численности рыб-жертв, а $\frac{dx}{dt}$ - скорость изменения численности рыб-хищников. Слагаемое $-\beta*x*y$ выражает уменьшение числа малых рыб в зависимости от численности больших. А слагаемое $\gamma*x*y$ выражает зависимость прироста больших рыб от численности малых рыб.

При некоторых значениях параметров α, β, γ, δ, скорости $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ могут оказаться равными нулю, т.е.

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 0$$

при

$$\begin{cases} \alpha*y-\beta*x*y=0, \\ -\delta*x+\delta*x*y=0. \end{cases}$$

Это значит, что точка $M\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma}\right)$ является "стационарным состоянием" изучаемой системы - она находится в равновесии, и ни число жертв, ни число хищников не меняется с течением времени.

Итак, задача "хищник-жертва" свелась к решению системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \alpha*y - \beta*x*y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -\delta*x + \gamma*x*y. \end{cases} \qquad (*)$$

Найдем зависимость между x и y. Разделим первое уравнение на второе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y*(\alpha-\beta*x)}{x*(\gamma*y-\delta)}.$$

Тогда можно разделить переменные

$$\frac{\gamma*y-\delta}{y} * dy = \frac{\alpha-\beta*x}{x} * dx.$$

Интегрируя, получим с точностью до константы

$$\gamma*y - \delta*\ln y = \alpha*\ln x - \beta*x + \ln C.$$

Отсюда

$$\ln\left[C*x^{\alpha}*e^{-\beta*x}\right] = \ln\left[e^{\gamma*y}*y^{-\delta}\right]$$

или

$$C*x^{\alpha}*e^{-\beta*x} = y^{-\delta}*e^{\gamma*y}. \qquad (**)$$

Это равенство связывает число жертв y и число хищников x. Значение C определяется начальными значениями x_0 и y_0. На фазовой плоскости x, y уравнение (**) определяет замкнутые траектории, характерезующие периодические изменения численности жертв и хищников.

В заключении этого параграфа, подчеркнем, что система (*) не является точным отражением действительности - на самом деле надо учитывать наличие многих видов, их различие взаимодействия, общие условия, ограничивающие рост численности некоторого вида, и многие другие факторы.

Задача о хищниках и жертвах.

Рассматривается двухвидовая модель хищник-жертва - дифференциальная модель развития популяций, которая связана с размножением или вымиранием последних.

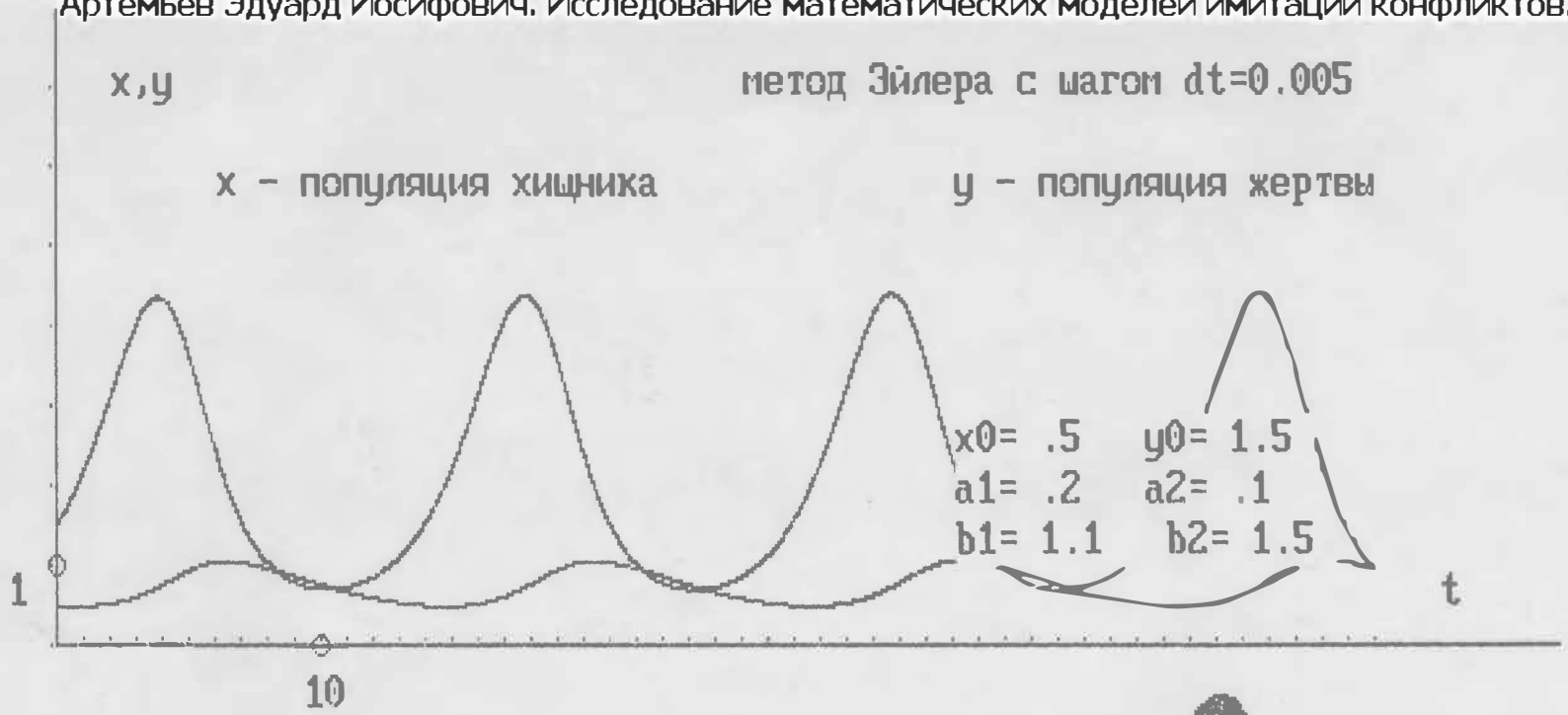
x - число больших рыб-хищников, y - число рыб-жертв.

Модель, построенная Вольтерра,имеет вид

$$dx/dt = -a1*x + a2*x*y$$

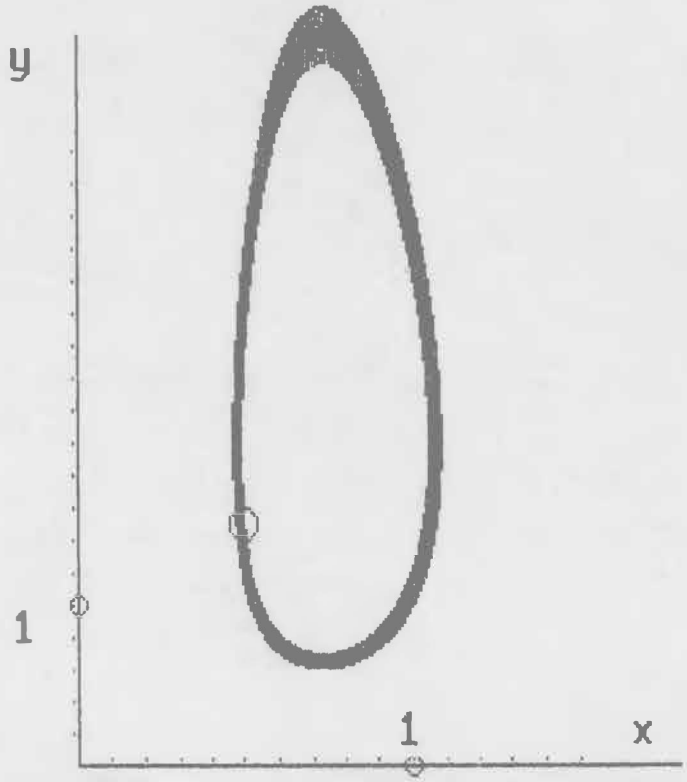
$$dy/dt = b1*y - b2*x*y$$

При шаге dt=0.1 графики имеют сильно выраженную тенденцию к увеличению амплитуды. Это связано с накоплением погрешности численного счета при большом значении шага dt. Очевидно, для уточнения зависимости следует уменьшать dt или выбирать другой метод решения системы. Вольтерра предложил эту модель для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море, имеющих один и тот же период, но отличающихся по фазе. Слагаемое a2*x*y выражает зависимость прироста больших рыб от численности малых, а слагаемое -b2*x*y - уменьшение числа жертв в зависимости от численности хищников.



Модель Вольтерра.

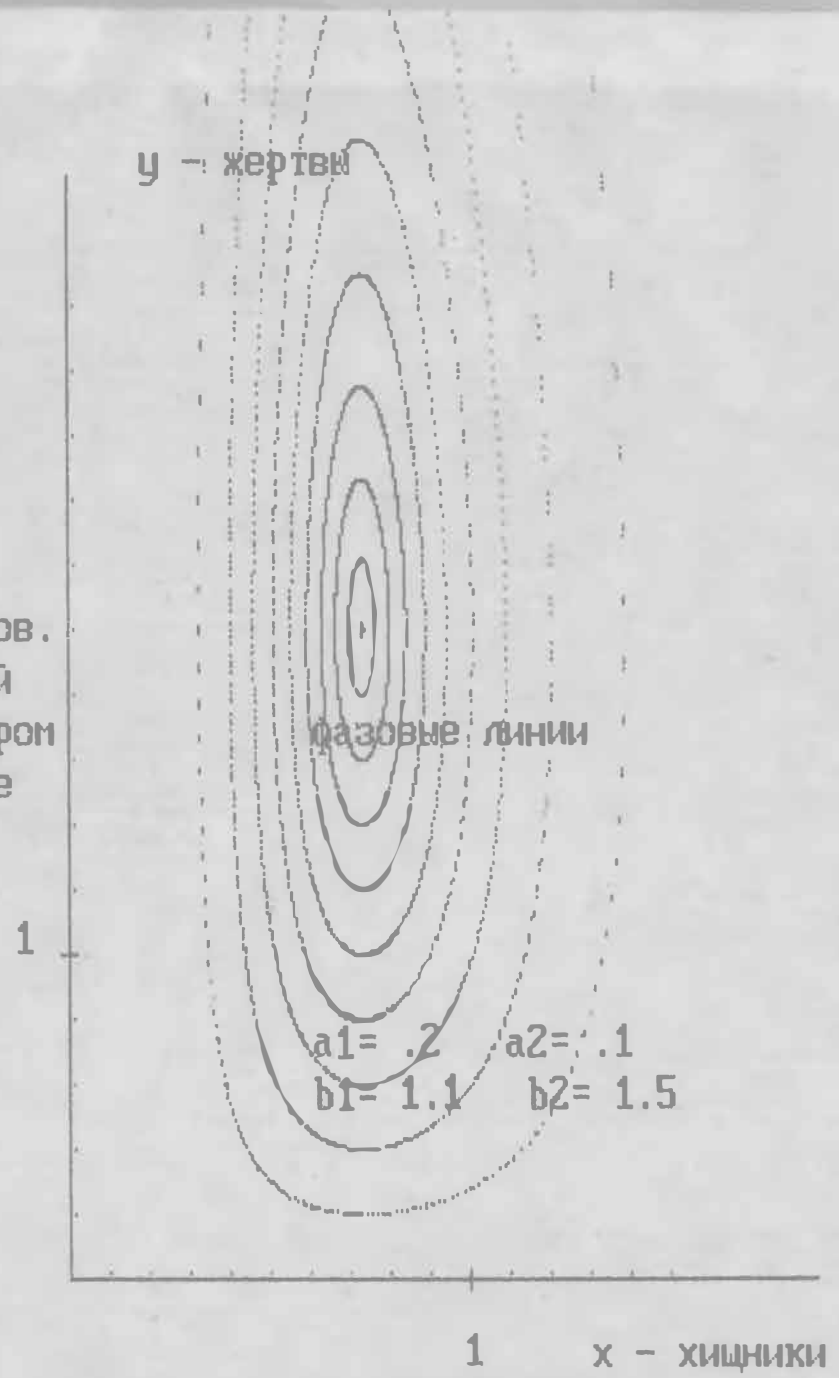
При уменьшении шага амплитуда изменения численности становится устойчивой на рассматриваемом промежутке t. На фазовой плоскости xy построена фазовая траектория y(x). Переменная x вначале убывает, а y - возрастает. Затем y достигает максимума и начинает убывать, а x продолжает возрастать и достигает максимума. Затем обе популяции сокращаются пока y не достигнет минимума. Процесс цикличен с погрешностью метода. Траектория медленно расходится при увеличении t.



Фазовые линии дифференциальной модели хищник-жертва. При начальных значениях численности жертв x=0.73 и хищников y=2 можно видеть, что фазовая кривая вырождается в точку - центр семейства кривых. Далее изменяются значения y от 2 до 0.2 с шагом 0.2

Замкнутость фазовых кривых подтверждает цикличность развития популяций жертв и хищников.

Центр семейства фазовых линий соответствует случаю, при котором численность жертв и хищников не меняется.



Задача о хищниках и жертвах.

Рассматривается двухвидовая модель хищник- жертва - дифференциальная модель развития популяций, которая связана с размножением или вымиранием последних.

x - число больших рыб-хищников

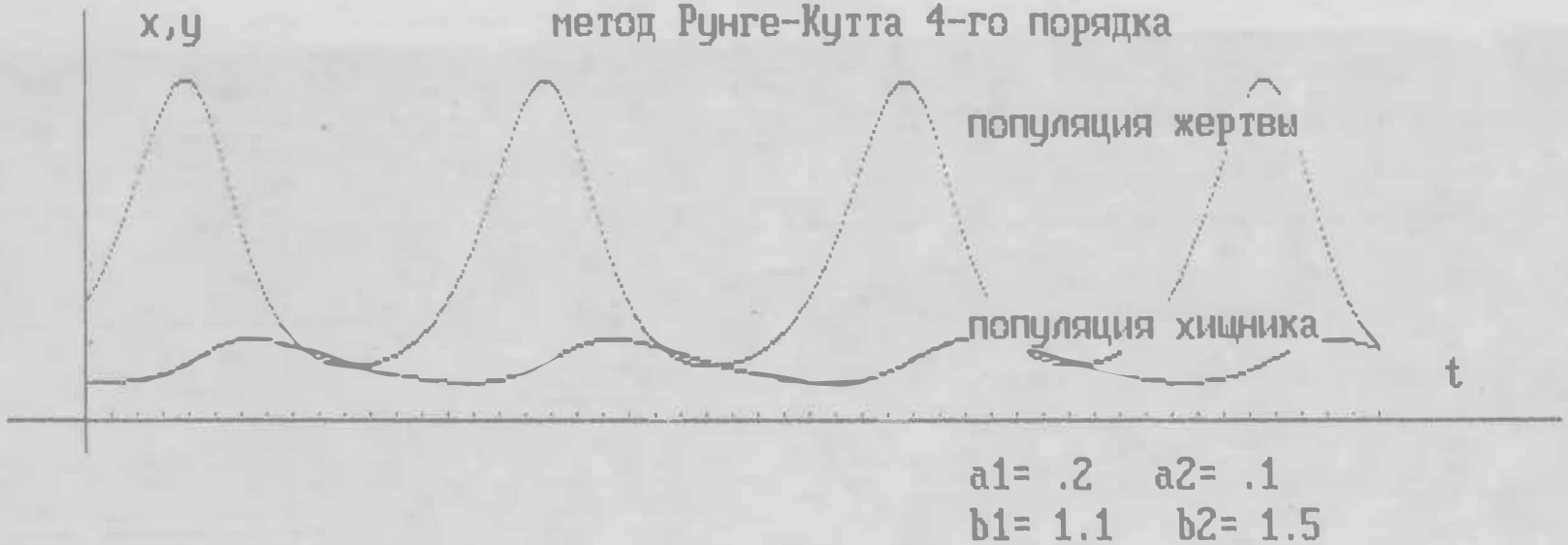
y - число рыб-жертв

Модель, построенная Вольтерра, имеет вид

$$dx/dt = -a1*x + a2*x*y$$

$$dy/dt = b1*y - b2*x*y$$

При шаге dt=0.1 графики имеют сильно выраженную тенденцию к увеличению амплитуды.



Метод Рунге-Кутта с шагом dt=0.1

Задача хищник-жертва решена численно с шагом 0.1, который методом Эйлера приводил к значительным погрешностям. Здесь имеем результаты, достижимые методом Эйлера лишь при уменьшении шага в 20 раз. Графики при сравнении 'на просвет' совпадают

Задача о двух хищниках и жертве.

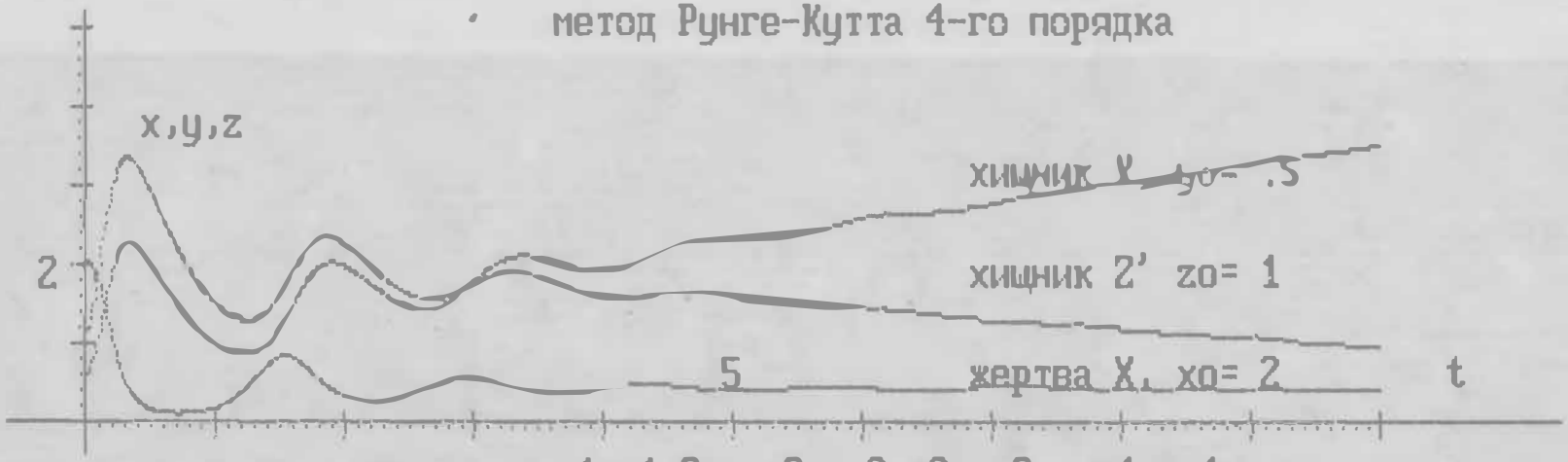
Модель развития трех разных сосуществующих популяций: двух популяций хищников с численностями y(t) и z(t) и одной популяции жертв с численностью x(t):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1*x - a_2*x*x - a_3*x*y - a_4*x*z \\ \frac{dy}{dt} = -b_1*y + b_2*x*y \\ \frac{dz}{dt} = -c_1*z + c_2*x*z \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Здесь учитывается эффект самоотравления жертвы. Ниже приведены расчеты и без учета самоотравления.

Численная реализация итерационного процесса не сильно отличается от схемы для двух видов. Но выводы таковы, что один из видов хищников вымирает в конкурентной борьбе за источник питания, т.е. жертву.

метод Рунге-Кутта 4-го порядка

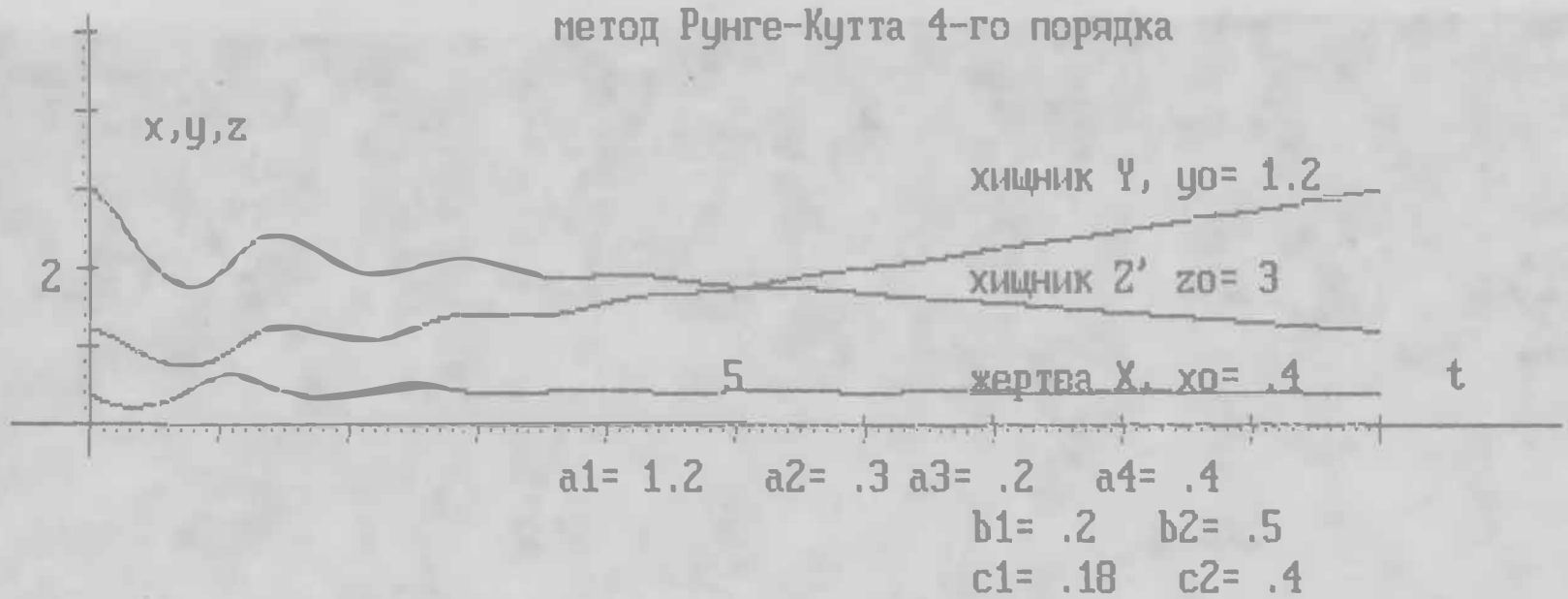


a1= 1.2 a2= .3 a3= .2 a4= .4
b1= .2 b2= .5
c1= .18 c2= .4

Здесь рассматриваются две популяции хищников A и B численностью y(t) и z(t) сответственно. Они конкурируют в борьбе за один и тот же источник питания, которым является третья популяция C - жертва численностью x(t). Один из видов должен вымирать. Если этим видом окажется источник питания, то вымрут и хищники.

Дифференциальные уравнения развития трех популяций

dx/dt= a1*x-a2*x*x-a3*x*y-a4*x*z
dy/dt=-b1*y+b2*x*y
dz/dt=-c1*z+c2*x*z



a1 - коэффициент линейного роста численности жертвы;
a2 - коэффициент, характеризующий внутривидовую борьбу;
a3 - коэффициент поедания жертвы первым хищнîком B;
a4 - коэффициент поедания жертвы вторым хищнîком C;

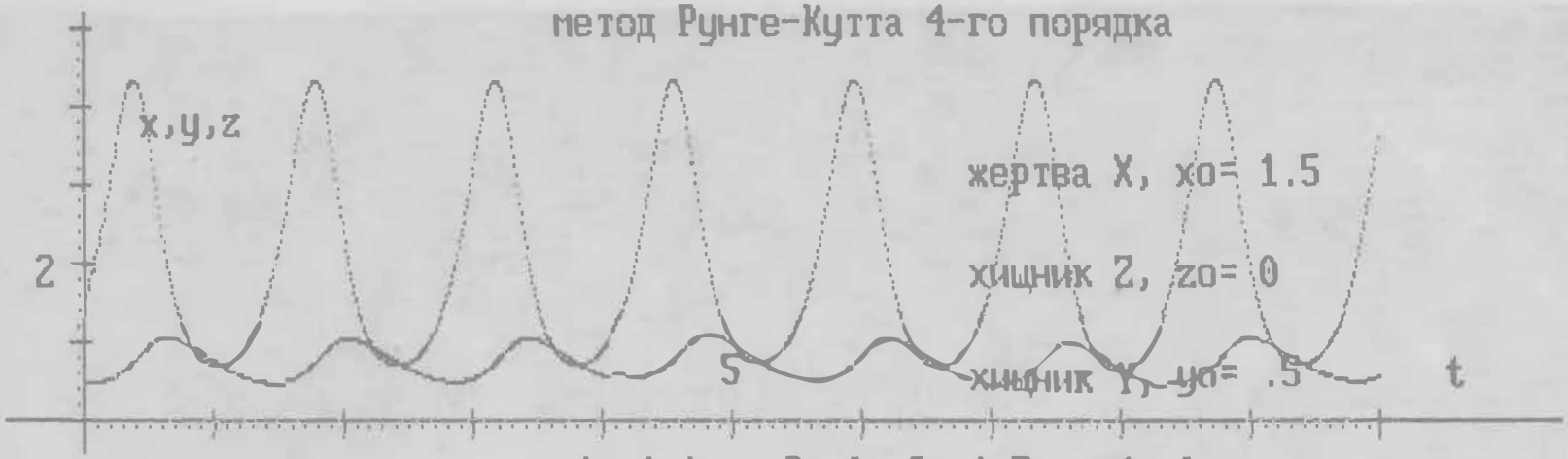
b1 - коэф. задержки роста хищника B при отсутствии жертв;
b2 - коэф. прироста хищника B при наличии пищи (жертв);
c1 - коэф. задержки роста хищника C при отсутствии жертв;
c2 - коэф. прироста хищника C при наличии пищи (жертв);

a1= 1.1 a2= 0 a3= 1.5 a4= 0
b1= .2 b2= .1
c1= .1 c2= .02

a1 - коэффициент линейного роста численности жертвы;
a2 - коэффициент, характеризующий внутривидовую борьбу;
a3 - коэффициент поедания жертвы первым хищником B;
a4 - коэффициент поедания жертвы вторым хищником C;

b1 - коэф. задержки роста хищника B при отсутствии жертв;
b2 - коэф. прироста хищника B при наличии пищи (жертв);
c1 - коэф. задержки роста хищника C при отсутствии жертв;
c2 - коэф. прироста хищника C при наличии пищи (жертв);

Здесь коэффициенты соответствуют задаче о двух хищниках и одной жертве. Влияние самоотравления жертвы исключено. Видно, что популяция хищника Z вымирает в результате конкуренции.

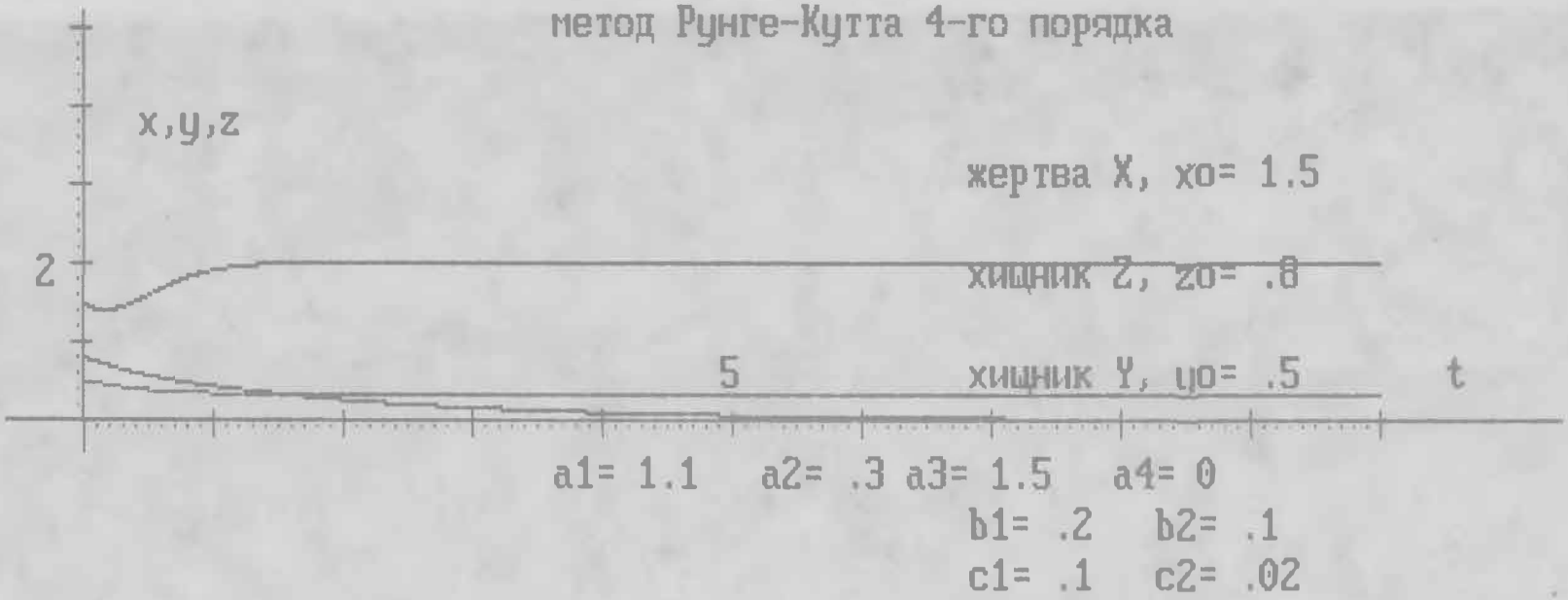


a1= 1.1 a2= 0 a3= 1.5 a4= 0
b1= .2 b2= .1
c1= 0 c2= 0

a1 - коэффициент линейного роста численности жертвы;
a2 - коэффициент, характеризующий внутривидовую борьбу;
a3 - коэффициент поедания жертвы первым хищником B;
a4 - коэффициент поедания жертвы вторым хищником C;

b1 - коэф. задержки роста хищника B при отсутствии жертв;
b2 - коэф. прироста хищника B при наличии пищи (жертв);
c1 - коэф. задержки роста хищника C при отсутствии жертв;
c2 - коэф. прироста хищника C при наличии пищи (жертв);

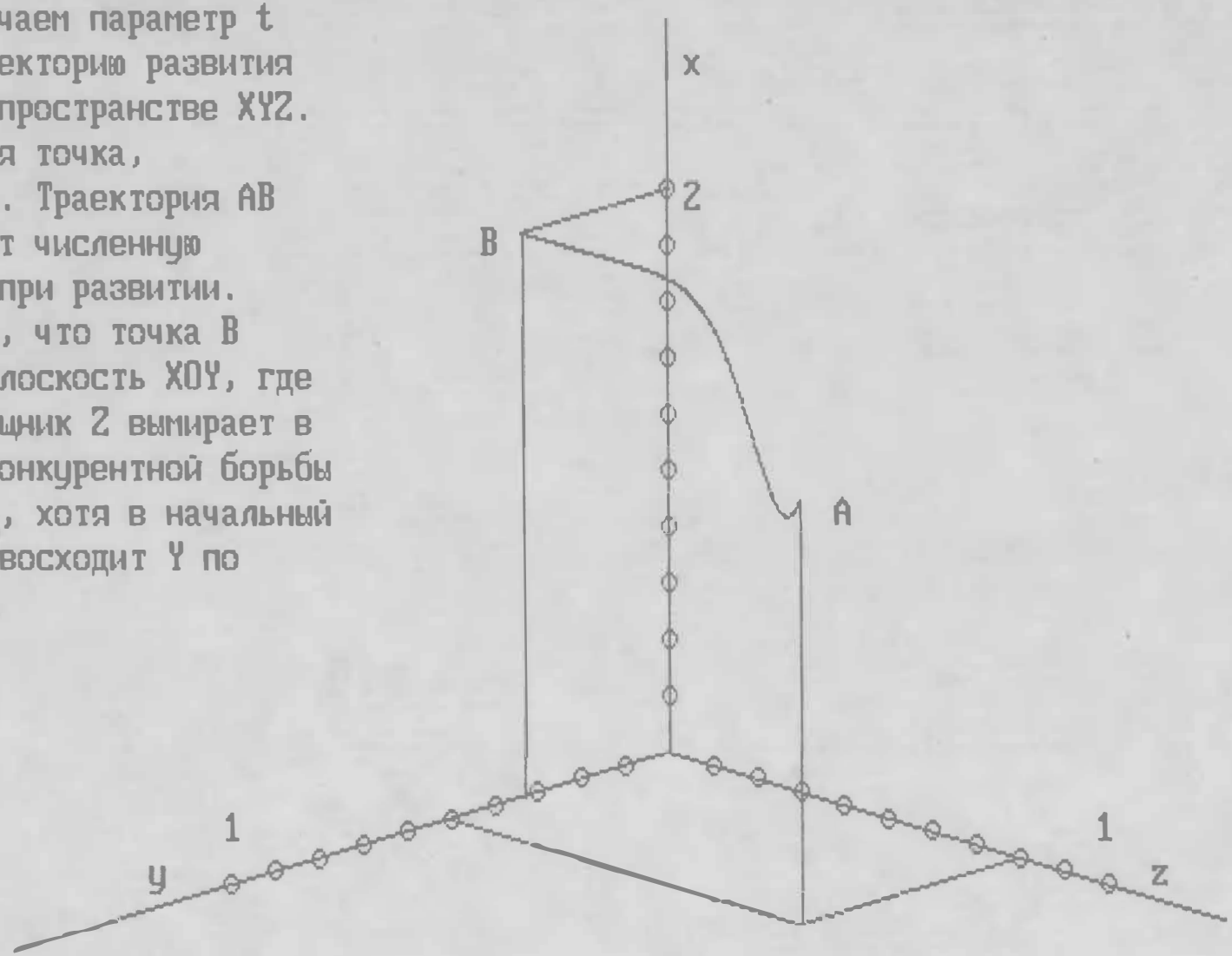
Здесь коэффициенты соответствуют задаче об одном хищнике и одной жертве, т.е. влияние третьего хищника и самоотравления жертвы исключено.



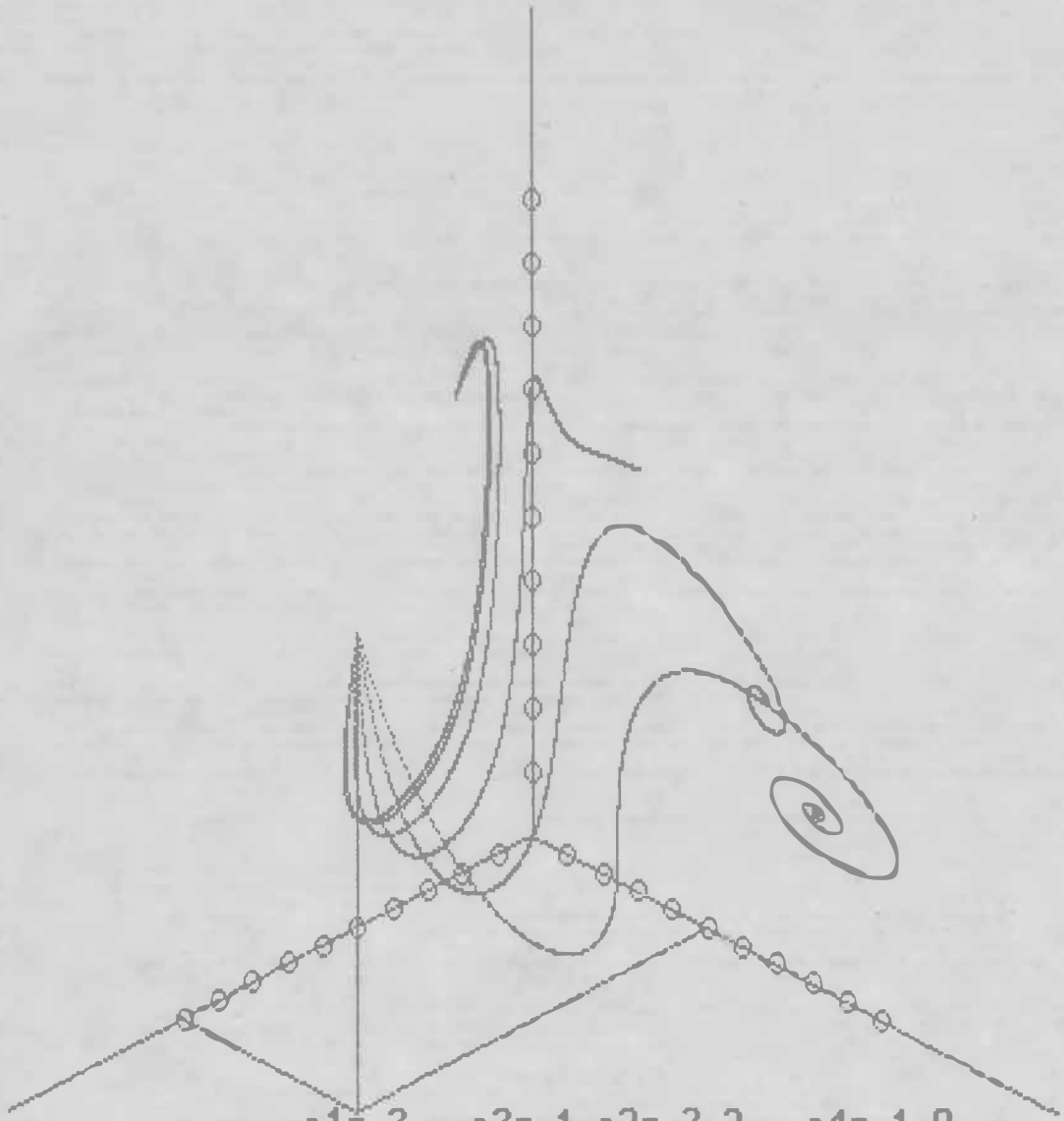
a1 - коэффициент линейного роста численности жертвы;
a2 - коэффициент, характеризующий внутривидовую борьбу;
a3 - коэффициент поедания жертвы первым хищником B;
a4 - коэффициент поедания жертвы вторым хищником C;
b1 - коэф. задержки роста хищника B при отсутствии жертв;
b2 - коэф. прироста хищника B при наличии пищи (жертв);
c1 - коэф. задержки роста хищника C при отсутствии жертв;
c2 - коэф. прироста хищника C при наличии пищи (жертв);

Здесь коэффициенты соответствуют задаче о двух хищниках и одной жертве. Сказывается влияние самоотравления жертвы. Видно, что популяция хищника Z вымирает в результате конкуренции. Но самоотравление приводит к асимптотическому установлению предела численности хищников Y и жертв X

В задаче о двух хищниках и жертве исключаем параметр t и строим траекторию развития популяций в пространстве XYZ. A - начальная точка, B - конечная. Траектория AB характеризует численную зависимость при развитии. Хорошо видно, что точка B выходит на плоскость XOY, где z=0, т.е. хищник Z вымирает в результате конкурентной борьбы с хищником Y, хотя в начальный момент Z превосходит Y по численности.



a1= 1.1 a2= .3 a3= 1.5 a4= 0
b1= .2 b2= .1
c1= .1 c2= .02
xo= 1.5 yo= .5 zo= .8



a1= 2 a2= 1 a3= 2.3 a4= 1.8

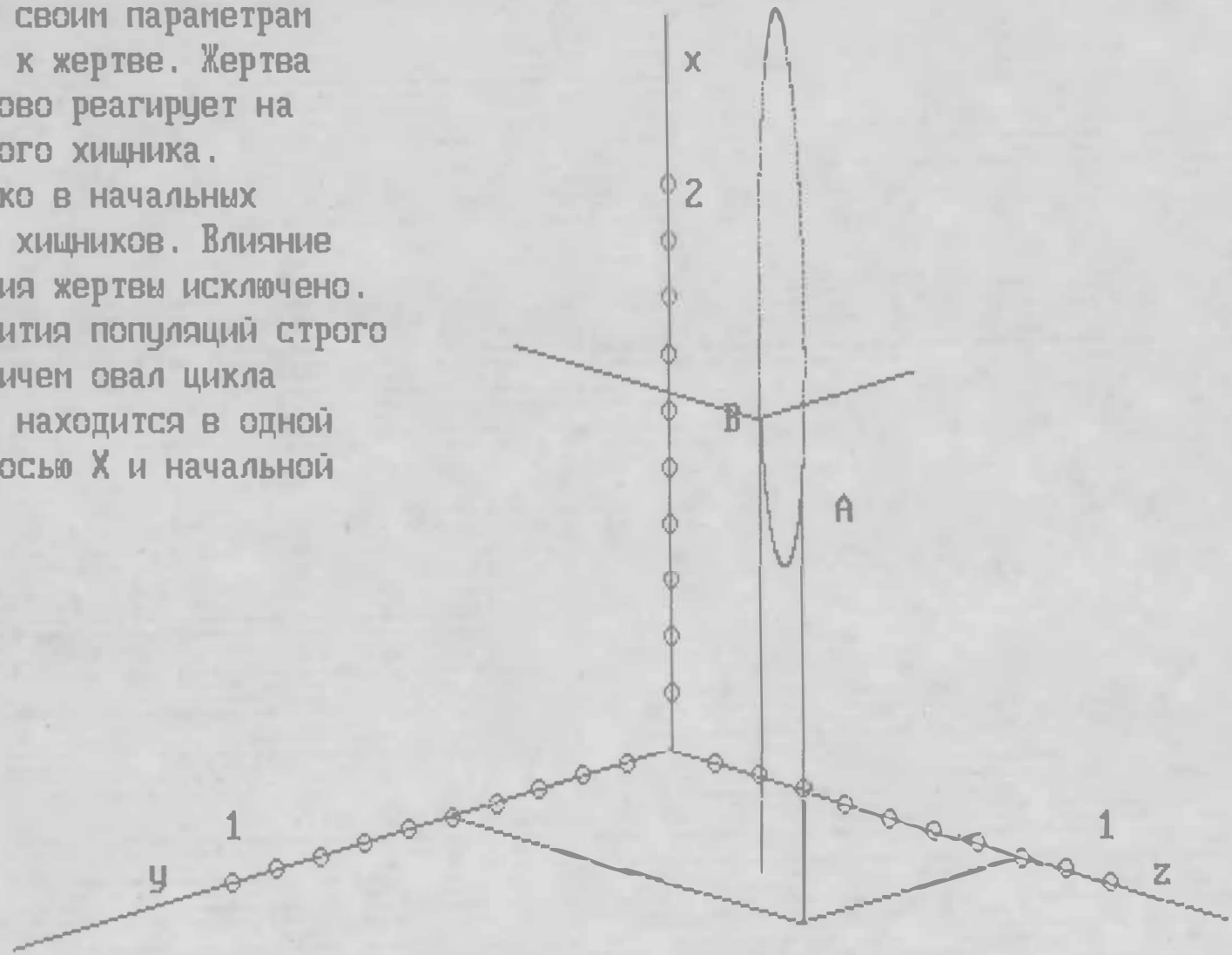
b1= 1.5 b2= 1

c1= 1.3 0<c2<4 h=(i/3)^2

xo= 1.5 yo= 1 zo= .5

Press any key to continue

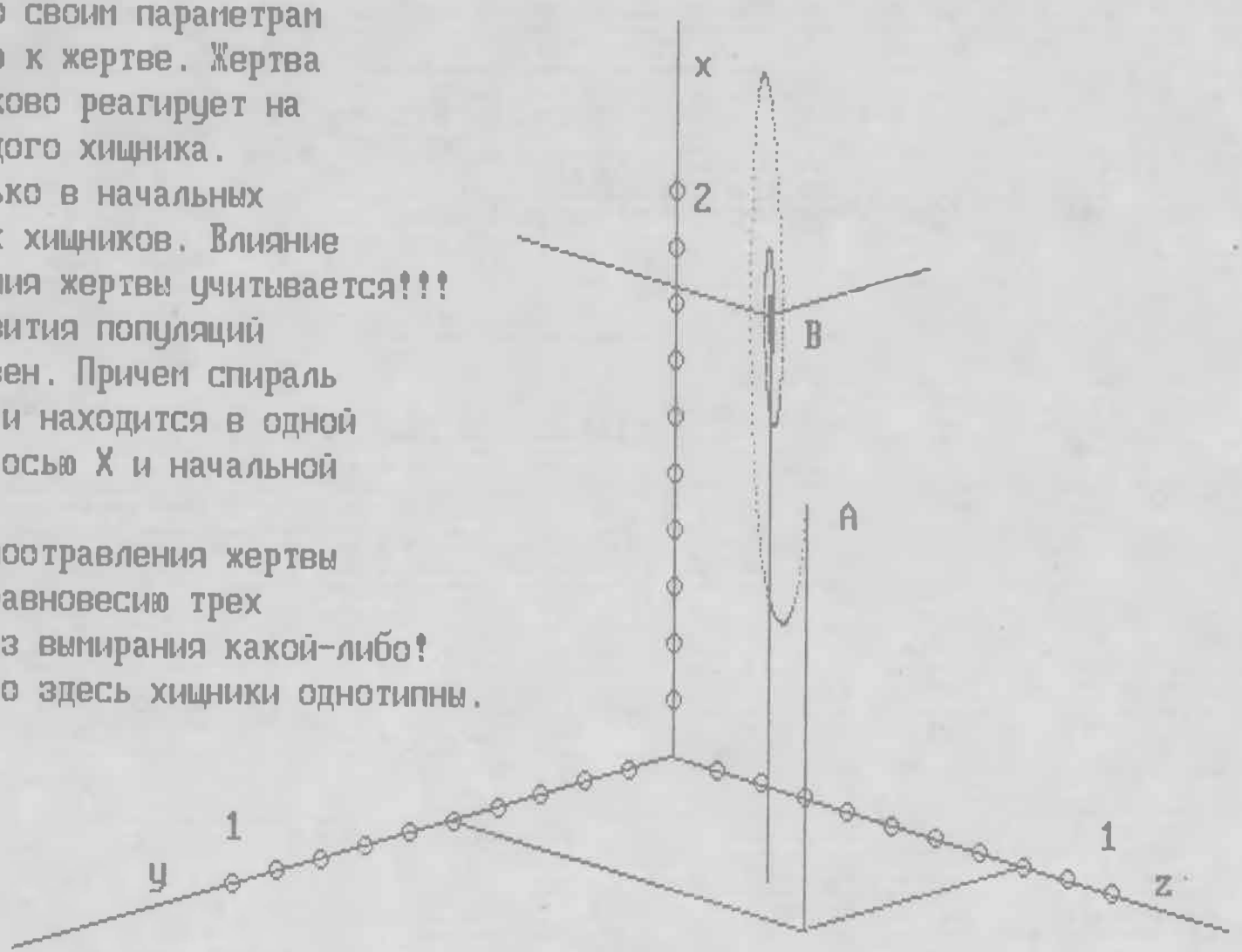
Две популяции хищников одинаковы по своим параметрам по отношению к жертве. Жертва также одинаково реагирует на влияние каждого хищника. Отличие только в начальных численностях хищников. Влияние самоотравления жертвы исключено. Процесс развития популяций строго цикличен. Причем овал цикла вертикален и находится в одной плоскости с осью X и начальной точкой A.



a1= 1.1 a2= 0 a3= 1 a4= 1
b1= .2 b2= .1
c1= .2 c2= .1
xo= 1.5 yo= .5 zo= .8

Две популяции хищников одинаковы по своим параметрам по отношению к жертве. Жертва также одинаково реагирует на влияние каждого хищника. Отличие только в начальных численностях хищников. Влияние самоотравления жертвы учитывается!!! Процесс развития популяций спиралеобразен. Причем спираль вертикальна и находится в одной плоскости с осью X и начальной точкой A.

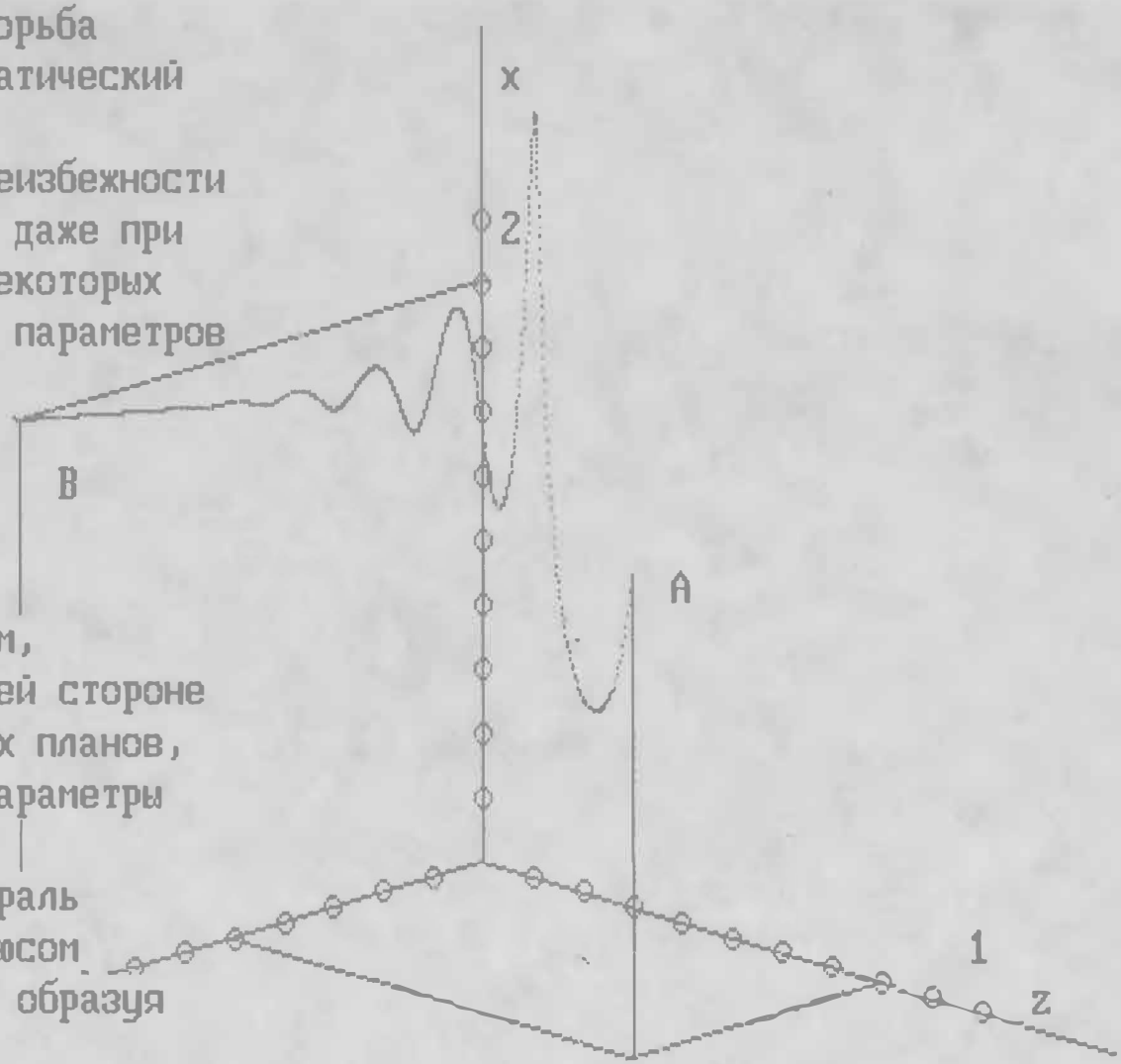
Эффект самоотравления жертвы приводит к равновесию трех популяций без вымирания какой-либо! Напомним, что здесь хищники однотипны.



a1= 1.1 a2= .08 a3= 1 a4= 1
b1= .2 b2= .1
c1= .2 c2= .1
xo= 1.5 yo= .5 zo= .8

Стоит незначительно изменить параметры хищников, как борьба между ними принимает драматический характер.

Еще раз убеждаемся в неизбежности уничтожения одного из них даже при незначительном различии некоторых параметров одного вида от параметров другого.



Пора делать вывод о том, что для выживания, гибнущей стороне нужно, при неимении других планов, фиксировать и принимать параметры конкурента.

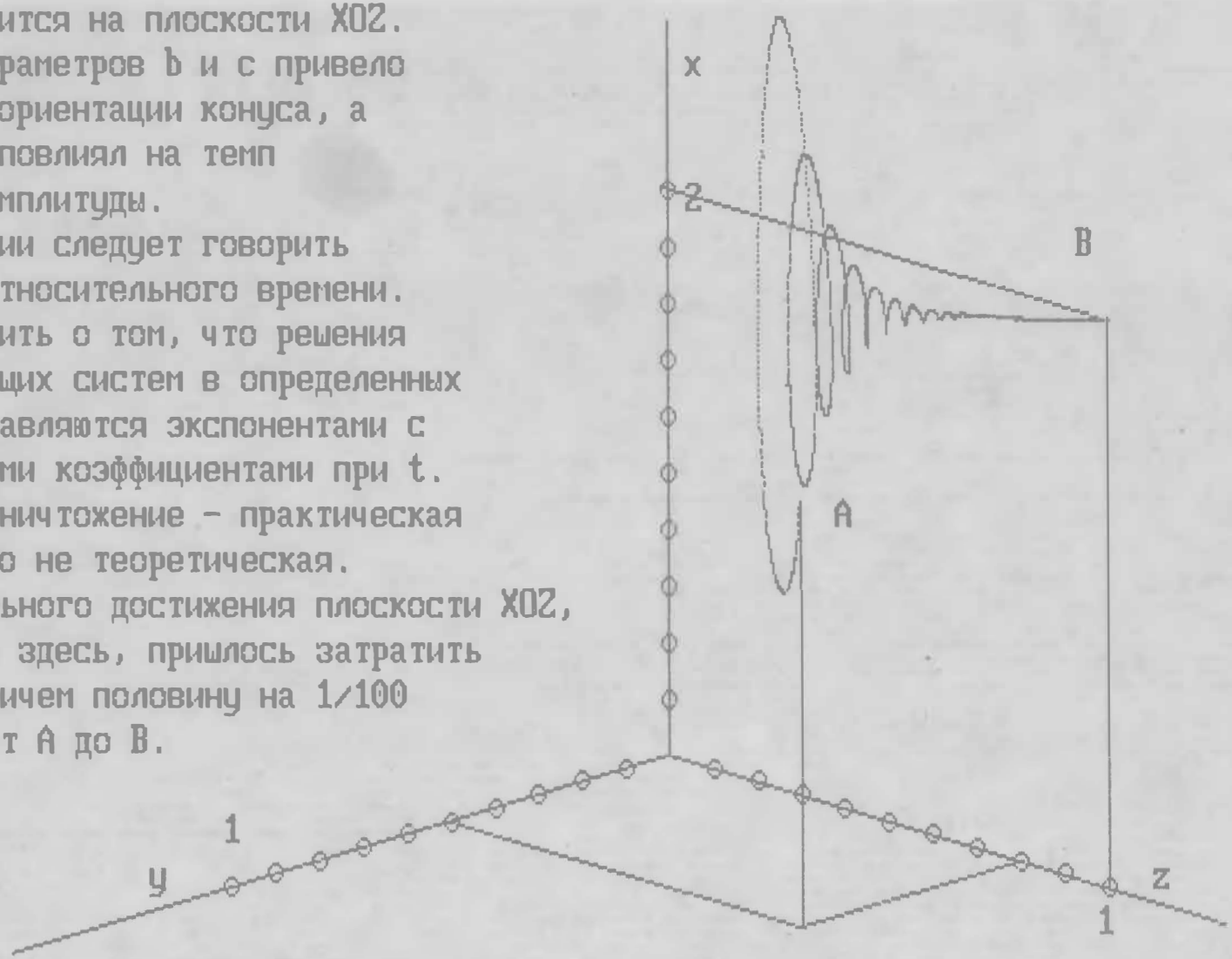
Заметим, что здесь спираль растягивается и своим полюсом стремится к плоскости XOY образуя коническую спираль.

a1= 1.1 a2= .08 a3= 1 a4= 1
b1= .2 b2= .11
c1= .21 c2= .1
xo= 1.5 yo= .5 zo= .8

Вершина конической спирали теперь находится на плоскости XOZ. Изменение параметров b и c привело к изменению ориентации конуса, а параметр a2 повлиял на темп уменьшения амплитуды.

О вымирании следует говорить в терминах относительного времени. Следует помнить о том, что решения соответствующих систем в определенных пределах управляются экспонентами с отрицательными коэффициентами при t. Абсолютное уничтожение - практическая категория, но не теоретическая.

Для зрительного достижения плоскости XOZ, наблюдаемого здесь, пришлось затратить 10000 dt, причем половину на 1/100 всего пути от A до B.



a1= 1.1 a2= .04 a3= 1 a4= 1
b1= .21 b2= .1
c1= .2 c2= .1
xo= 1.5 yo= .5 zo= .8

Простейшие модели вооруженной борьбы. (Модели Ланчестера)

Модель Ланчестера 1-го рода.

Начнем изучение процесса вооруженной борьбы с описания простейших ситуаций, классическим примером которых является следующая ситуация. Две группировки противника А и В, сотоящие каждая из одинаковых боевых единиц, находятся в процессе взаимодействия друг с другом, протекающем следующим образом. Каждая боевая единица противника А ведет поиск некоторой единицы противника В и, как только находит ее, совершает по ней один "элементарный акт воздействия". Точно так же ведет себя и каждая боевая единица противника В. Что такое элементарный акт огневого воздействия, зависит от того, что представляют собой боевые единицы и какими средствами они обладают. В простейшей интерпретации боевые единицы - это солдаты со стрелковым оружием, а элементарный акт воздействия - один выстрел (или очередь из автоматического оружия). Не исключена, однако, такая интерпретация этих понятий, когда боевые единицы являются целыми подразделениями, а элементарные акты воздействия - огневые налеты с помощью различных систем вооружений, имеющихся у подразделений. Далее для краткости элементарный акт воздействия будем называть выстрелом.

В результате элементарного акта воздействия боевая единица, по которой он совершался, либо остается совершенно неповрежденной и принимает участие в дальнейшем процессе наряду со всеми остальными, либо "мгновенно" выходит из строя и не оказывает на дальнейшее течение процесса никакого действия. Это означает, что она сама не совершает никаких актов воздействия по боевым единицам противника в течение всего дальнейшего процесса, а также факт ее выхода из строя "сразу же" становится известным всем единицам противника и по ней в дальнейшем не совершается никаких воздействий. Временем, которое проходит от момента выстрела до момента выхода из строя боевой единицы, если таковое имеет место в результате этого выстрела, будем пренебрегать.

Будем считать, что у каждой боевой единицы противника А при каждом выстреле вероятность вывести из строя единицу противника В одна и та же и равна $p_1(p_2)$. Будем считать также, что количество

выстрелов, совершаемых одной боевой единицей противника А в единицу времени, т.е. скорострельность, одно и то же в течении всего процесса. Обозначим его через $\alpha_1(\alpha_2)$. Обратим внимание на то, что величины α_1 и α_2 могут не совпадать, вообще говоря, с теми скорострельностями, которые являются техническими характеристиками имеющегося у боевых единиц оружия, и их постоянство является довольно существенным предположением относительно характера информационного процесса, сопутствующего изучаемому процессу взаимного уничтожения, поскольку для проведения прицельного выстрела по единице противника ее необходимо обнаружить.

Пусть в момент $t_0=0$ у противников было m_{10} и m_{20} боевых единиц соответственно. Нас будет интересовать дальнейшее течение прцесса, т.е. изменение численности боевых единиц противников с течением времени.

Конечно, маловероятно, чтобы в каком-либо вооруженном конфликте, которые имели место в прошлом, либо происходят сейчас, реализовывался тот самый процесс, который мы собираемся изучать: слишком много сделано предположений. Например, даже если боевые единицы вооружены одним и тем же оружием, практически они никогда не бывают полностью одинаковыми: вероятность поражения при одном и том же выстреле у различных боевых единиц различна. Далее, те боевые единицы, по которым в данный момент ведется огонь, в большинстве случаев знают это, и у таких единиц вероятность поражения противника при собственных выстрелах может существенно уменьшиться. В реальных условиях редко в течении всего процесса выполняются предположения, сделанные относительно информированности противников друг о друге: боевые единицы могут укрываться в складках местности, поле боя может быть задымлено, так что боевые единицы могут появляться и исчезать из поля зрения, и т.д. То, что мы собираемся изучать, - лишь некоторая схема реального процесса, в каких-то чертах на него похожая.

Обозначим численности боевых единиц противников в момент времени t через $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Потери противника В, т.е. число выведенных из строя противником А боевых единиц, на некотором временном промежутке $[t-\tau/2,\ t+\tau/2]$ длины τ (этот временной промежуток далее для краткости обозначается через П) равны, в соответствии с введенными обозначениями, $m_2*(t-\tau/2)-m_2*(t+\tau/2)$. Эти потери, с другой стороны, можно оценить следующим образом.

Одна боевая единица противника А на промежутке П делает $\alpha_1*\tau$

выстрелов. Предположим, что промежуток П столь мал, что можно считать, что количество выстрелов, сделанных противником А на промежутке П, в точности равно $\alpha_1*\tau*m_1(t)$. В этом случае математическое ожидание количества выведенных из строя единиц противника В равно $p_1*\alpha_1*\tau*m_1(t)$.

Итак, если сделанные выше предположения относительно промежутка П справедливы, то будет иметь место приближенное равенство

$$m_2*(t-\tau/2)-m_2*(t+\tau/2) \cong p_1*\alpha_1*\tau*m_1(t).$$

Аналогично,

$$m_1*(t-\tau/2)-m_1*(t+\tau/2) \cong p_2*\alpha_2*\tau*m_2(t).$$

Запишем эти соотношения в более удобном виде:

$$(m_2(t+\tau/2)-m_2(t-\tau/2))/\tau \cong -p_1*\alpha_1*m_1(t), \qquad (1)$$

$$(m_1(t+\tau/2)-m_1(t-\tau/2))/\tau \cong -p_2*\alpha_2*m_2(t). \qquad (2)$$

Слева в них фигурируют величины, трактуемые, естественным образом, как скорости изменения численности противников. Это дает основание постулировать следующую математическую модель, описывающую интересующие нас изменения численностей взаимодействующих противников:

$$dm_1/dt = -\alpha_2*p_2*m_2, \qquad (3)$$

$$dm_2/dt = -\alpha_1*p_1*m_1, \qquad (4)$$

$$m_1(0) = m_{10}, \qquad (5)$$

$$m_2(0) = m_{20}. \qquad (6)$$

Еще раз подчеркнем то, что модель (3)-(6) является некоторым постулатом, гипотезой, а рассуждения, которые дали основания ее ввести, не являются строгими, а представляют собой лишь некоторые "наводящие" соображения. Хотя мы не изменили обозначения для численностей противников в модели (3)-(6), однако, величины m_1 и

m_2, фигурирующие в соотношениях (1), (2), и величины m_1 и m_2, фигурирующие в модели (3)-(6), - это разные величины. В соотношениях (1) и (3) эти величины в соответствии со здравым смыслом являются целыми числами, точнее, - целочисленными функциями времени; в соотношениях (3)-(6) величины m_1 и m_2 являются дифференцируемыми функциями времени, обязательно принимающими как целые, так и дробные значения. Таким образом, в соотношениях (3)-(6) величины $m_1(t)$ и $m_2(t)$ - это не "настоящие" численности, а некоторые абстрактные характеристики. Их пришлось ввести для получения строгих, однозначно трактуемых соотношений (3)-(6), из которых уже чисто математическими средствами можно извлекать следствия. В частности, соотношения (3)-(6) позволяют дать прогноз развития изучаемого процесса, поскольку они однозначно определяют функции $m_1(t)$ и $m_2(t)$, характерезующие численности, если заданы начальные условия m_{10} и m_{20}, а также величины α_1, p_1, α_2, p_2. Иначе модель (3)-(6) замкнута, если считать в ней внутренними величинами функции $m_1(t)$ и $m_2(t)$, а внешними - начальные условия m_{10} и m_{20} и величины α_1, p_1, α_2, p_2. Этот факт имеет строгое математическое выражение: решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) при начальных условиях (5), (6) существует и единственно.

Модель (3)-(6) получила название модели Ланчестера 1-го рода. Мы начнем ее изучение с некоторых преобразований. Обозначим

$$k_1=\alpha_1*p_1, \quad k_2=\alpha_2*p_2, \quad t'=t/T_{хар}, \qquad (7)$$

$$n_1=m_1*k_1^{1/2}, \quad n_2=m_2*k_2^{1/2}. \qquad (8)$$

Примечание. Здесь $T_{хар}=1/(k_1*k_2)^{1/2}$ характерезует интенсивность процесса уменьшения численностей противников, t' называется приведенным временем. Штрих при приведенном времени будет далее опускаться.

Перейдем в (3)-(6) к величинам, введенным формулами (7), (8). Получим

$$\begin{cases} dn_1/dt = -n_2, & (9) \\ dn_2/dt = -n_1, & (10) \end{cases}$$

$$n_1(0)=n_{10}=m_{10}*k_1^{1/2}, \qquad (11)$$

$$n_2(0)=n_{20}=m_{20}*k_2^{1/2}. \qquad (12)$$

Величины k_1 и k_2 называются коэффициентами эффективности, n_1 и n_2 - приведенными численностями. Очевидно, что форма (9)-(12) модели (3)-(6) более удобна для анализа.

Система (9), (10) является линейной однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой, удовлетворяющее начальным условиям (11), (12), можно выписать в замкнутой аналитической форме. Сделаем это позже. Сейчас же рассмотрим один из первых интегралов системы (9), (10) - функцию величин, фигурирующих в системе, при подстановке в которую любого решения системы она обращается в постоянную. Нас будет интересовать интеграл, не зависящий от времени. Такой у системы (9), (10) с точностью до функционального комбинирования существует только один.

Для его получения умножим (9) на n_1, (10) - n_2 и вычтем их друг из друга. Получим соотношение

$$n_1*\frac{dn_1}{dt} - n_2*\frac{dn_2}{dt} = 0.$$

Его интегрирование дает

$$n_1^2(t)-n_2^2(t)= n_{10}^2-n_{20}^2. \qquad (13)$$

Таким образом, разность квадратов приведенных численностей противников не меняется в течение всего изучаемого нами процесса и равна поэтому такой разности в начале процесса. Соотношение (13) называется законом квадратов. Оно содержит важную информацию о характере изучаемого процесса: для того, чтобы понять, как протекает процесс, т.е. как именно он изменяет характерезующие его величины, необходимо в первую очередь понять, что' именно этот процесс не меняет, т.е. какие именно величины сохраняются при его течении; другими словами, необходимо выявить его инварианты. Из (13) сразу же вытекает, что победу во взаимодействии одержит тот из противников, у которого в начале была большая приведенная численность. Если, например, $n_{10}>n_{20}$, то, как следует из (13), в течение всего процесса будет $n_1>n_2$. В этом случае в тот момент t^*, когда у второго противника численность обратится в 0, т.е. он

будет полностью уничтожен, у первого противника останется

$$n_1(t^*) = (n_{10}^2 - n_{20}^2)^{1/2} \qquad (14)$$

боевых единиц. Вспомнив соотношения (8), определяющие приведенные численности, мы получаем представление об относительной важности технической вооруженности боевых единиц и их численности, поскольку величины $k_1=\alpha_1*p_1$, $k_2=\alpha_2*p_2$ являются математическими ожиданиями количества выведенных из строя единиц одного из противников одной единицей другого противника в единицу времени и могут трактоваться поэтому как характеристики технической вооруженности противников.

Еще одно важное, с содержательной точки зрения, следствие закона квадратов (13) выявляется из рассмотрения следующей ситуации. Пусть у обоих противников имеется одно и то же начальное количество приведенных сил $n_{10}=n_{20}=n_0$, однако процесс взаимодействия походит в два этапа. На первом этапе противник А вступает всеми своими силами n_0 во взаимодействие лишь с половиной сил n_0 противника В. В этом взаимодействии победу одержит противник А, у него после окончания взаимодействия останется, в соответствии (14), $n_1=\left[\sqrt{3}/2\right]*n_0$ приведенных сил. На втором этапе этими силами противник А вступает во взаимодействие со второй половиной сил противника В. Поскольку $\left[\sqrt{3}/2\right]*n_0>n_0/2$, то опять победу одержит первый противник, причем у него после второго взаимодействия останется, в соответствии с (14) $n_1=\left[\sqrt{2}/2\right]*n_0\cong 0.7*n_0$ приведенных сил. Первый противник в описанном взаимодействии полностью уничтожил второго, истратив на это лишь около 30% своих сил.

Рассмотренный пример демонстрирует хорошо известный со времен древности принцип, состоящий в том, что "противника необходимо бить по частям". В дальнейшем для краткости этот принцип будет именоваться принципом БПЧ. Естественно, чем на большее количество частей удастся разбить противника и по очереди всеми своими силами вступить во взаимодействие с этими частями, тем больший эффект будет достигаться. В описанной выше ситуации, если противник В разбит не на две, а на N равных частей, то у противника А после полного уничтожения противника В, т.е. посте N-го взаимодействия

останется $\sqrt{(N-1)/N}*n_0$ приведенных сил. Другая сторона принципа БПЧ состоит в том, что можно побеждать противника, имея меньшую начальную приведенную численность. Если противник B разбит на N равных частей, то противник A побеждает, имея чуть больше, чем $\sqrt{1/N}*n_0$ приведенных сил.

Приведем теперь решение системы (9), (10) с начальными условиями (11), (12). Продифференцируем уравнение (9) и, используя уравнение (10), получим $d^2n_1/dt^2=n_1$. Общее решение этого уравнения дается формулой $n_1=A*\exp(t)+B*\exp(-t)$. Подставляя это в (10), прлучаем $n_2=-A*\exp(t)+B*\exp(-t)$. Используя начальные условия (11), (12), получаем для определения произвольных постоянных A и B соотношения $A+B=n_{10}$, $B-A=n_{20}$. Таким образом,

$$n_1 = n_{10}*(\exp(t)+\exp(-t))/2 - n_{20}*(\exp(t)-\exp(-t))/2,$$

$$n_2 = -n_{10}*(\exp(t)-\exp(-t))/2 + n_{20}*(\exp(t)+\exp(-t))/2,$$

или

$$n_1 = n_{10}*ch(t) - n_{20}*sh(t), \qquad (15)$$

$$n_2 = -n_{10}*sh(t) + n_{20}*ch(t). \qquad (16)$$

Значение приведенного времени t^*, при котором взаимодействие прекращается из-за полного уничтожения противника B, дается формулой

$$t^* = \frac{1}{2}*\ln\left(\left(\frac{n_{10}}{n_{20}}+1\right)\Big/\left(\frac{n_{10}}{n_{20}}-1\right)\right) = \operatorname{arcth}\left(\frac{n_{20}}{n_{10}}\right). \qquad (17)$$

Если же $n_{10}=n_{20}$, то $n_1=n_2=n_{10}*\exp(-t)$, и в этом случае процесс взаимодействия продолжается до бесконечности. (Необходимо иметь в виду, однако, что при малых численностях уравнения Ланчестера будут описывать процесс некорректно.)

Изучим теперь как ведет себя величина

$$S_1 = n_1 / n_2, \qquad (18)$$

которую принято называть соотношением сил (с точки зрения первого протвника). Соотношение сил часто фигурирует в профессиональном анализе и оценках ситуаций на театре военных действий. Дифференцируя S_1, получаем

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

$$\frac{dS_1}{dt} = \left[n_1^2 - n_2^2\right] / n_2^2 \quad \text{или} \quad \frac{dS_1}{dt} = S_1^2 - 1.$$

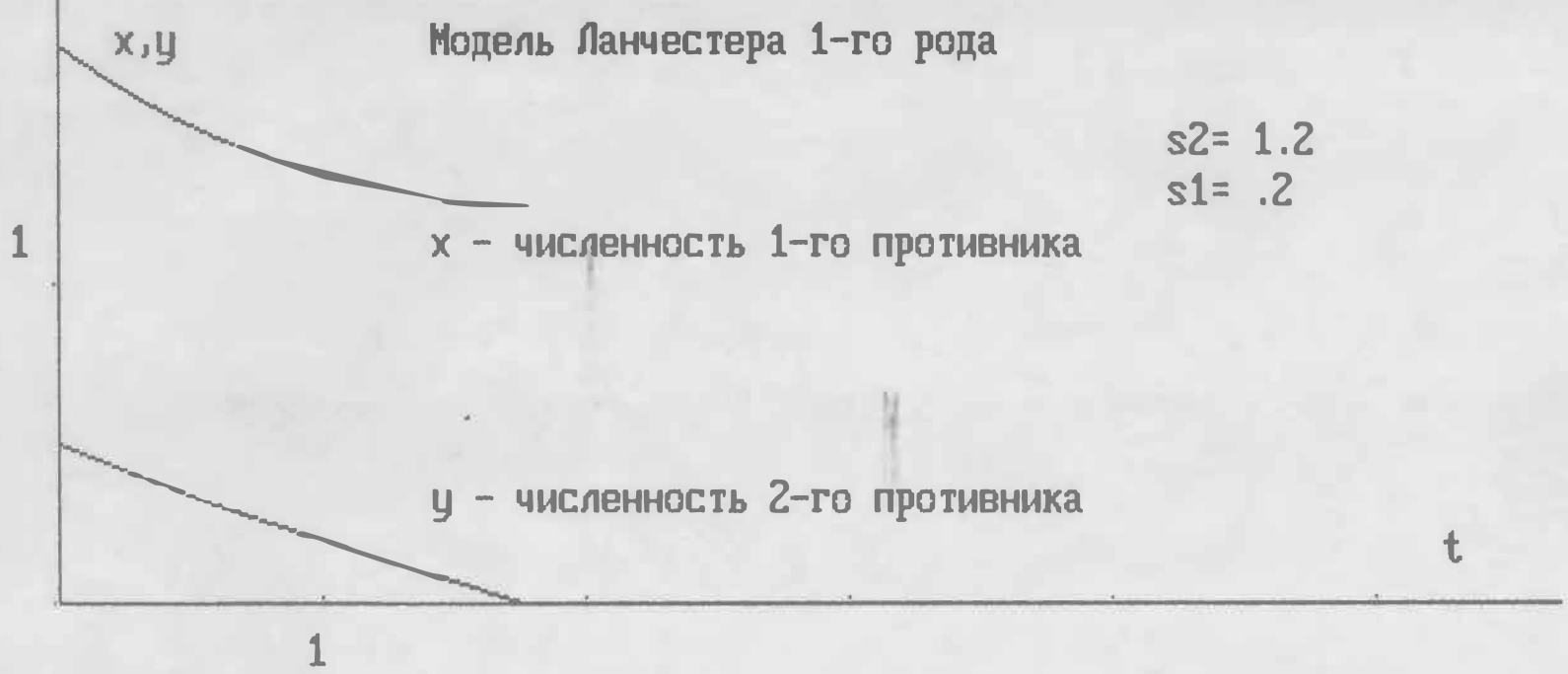
Интегрируя это уравнение при условии $S_1(0)=S_{10}=n_{10}/n_{20}$, получаем

$$S_1 = \frac{A_0 + \exp(2*t)}{A_0 - \exp(2*t)}, \qquad (19)$$

где $A_0=(S_{10}+1)/(S_{10}-1)$.

Если $S_1(0)>1$, то, как видно из (19), функция $S_1(t)$ монотонно возрастает до бесконечности, когда t меняется от 0 до t^*. Соотношение сил, таким образом, в течение изучаемого процесса становится все более в пользу того противника, который с самого начала был сильнее.

Одно из предположений, лежащих в основе модели Ланчестера 1-го рода, состояло в том, что каждый из противников в течение фиксированного промежутка времени (равного $1/\alpha_1$ для первого противника и $1/\alpha_2$ - для второго) обязательно находит непораженную боевую единицу противника, по которой он производит воздействие с неменяющейся со временем вероятностью ее вывода из строя.



x0= 1.75 y0= .5 - начальная численность

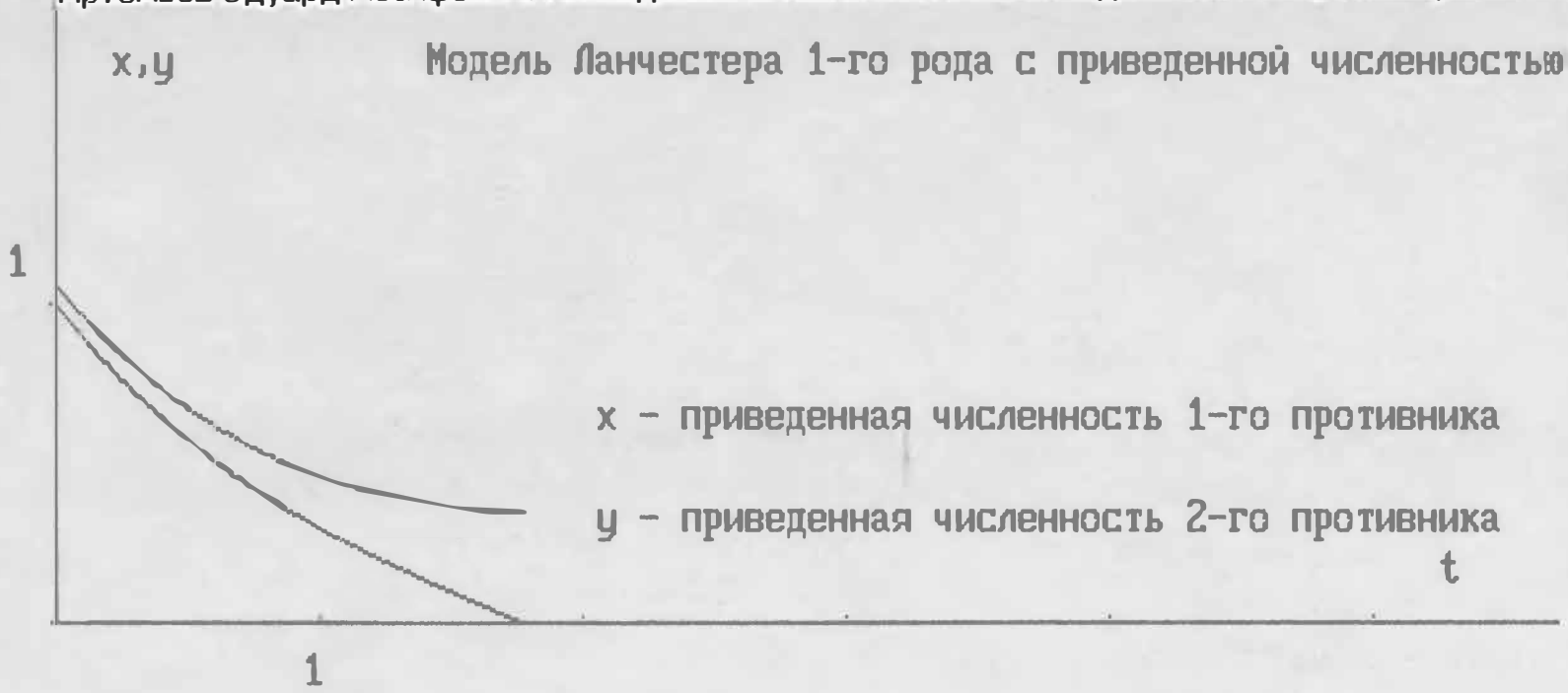
Простейшая модель вооруженной борьбы Ланчестера 1-го рода между противником - 1 и противником - 2. Дифференциальные уравнения модели имеют вид:

dx/dt=-s2*y, dy/dt=-s1*x, при x(0)=x0, y(0)=y0. (*)

Пусть p1 - вероятность с которой каждая боевая единица противника-1 при каждом выстреле поражает боевую единицу противника-2, a1 - скорострельность БЕ П-1, m1 - численность П-1 в момент t, dt - временной промежуток на котором определяются потери противника-2. Одна БЕ П-1 делает на промежутке dt a1*dt выстрелов. Математическое ожидание числа выведенных из строя БЕ П-2 принимаем равным p1*a1*dt*m1. Но это есть изменение численности БЕ П-2, т. е. -dm2. Следовательно, dm2=-p1*a1*m1*dt или dm2/dt=-p1*a1*m1. Аналогично получаются уравнения dm1/dt=-p2*a2*m2.Обозначим x=m1 и y=m2, s1=a1*p1 и s2=a2*p2. Получим уравнения (*).

```
'...                                        ...
'Модель Ланчестера 1-го рода - это одна из
'простейших моделей вооруженной борьбы.
'Построение зависимости численности x(t) противника - 1,
'и численности y (t) противника - 2.
'Построение фазовой траектории F(x,y)=0 методом Рунге-Кутта.

GOSUB 1000 'Подпрограмма построения системы координат

'правая часть диффуравнения изменения численности
'первого противника
DEF fnfx (x, y) = -s2 * y
'правая часть диффуравнения изменения численности
'второго противника
DEF fnfy (x, y) = -s1 * x

s2 = 1.2                    'коэффициенты диффуравнения
s1 = .2
tk = 100: dt = .01        'время конечное и приращение времени

t = 0: x = 1.75: y = .5        'начальные условия
x1 = x: y1 = y                 'вывода начальных данных
'Метод Рунге-Кутта
xo = x: yo = y

FOR i = 1 TO 250              'цикл изменения времени
IF x <= 0 OR y <= 0 THEN i = 500
t = t + dt
kx1 = fnfx(x, y) * dt
ky1 = fnfy(x, y) * dt
kx2 = fnfx(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
ky2 = fnfy(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
kx3 = fnfx(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
ky3 = fnfy(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
kx4 = fnfx(x + kx3, y + ky3) * dt
ky4 = fnfy(x + kx3, y + ky3) * dt
'приращение количества противника - 1
dx = (kx1 + 2 * kx2 + 2 * kx3 + kx4) / 6
'приращение количества противника - 2
dy = (ky1 + 2 * ky2 + 2 * ky3 + ky4) / 6
x = x + dx
y = y + dy
PSET (t0 + t * mt, x0 - x * mx)  'точка графика противника - 1
PSET (t0 + t * mt, x0 - y * mx)  'точка графика противника - 2
NEXT i



'Вывод комментариев и начальных данных
LOCATE 2, 25: PRINT "Модель Ланчестера 1-го рода"
LOCATE 6, 25: PRINT "x - численность 1-го противника"
LOCATE 11, 25: PRINT "y - численность 2-го противника"
LOCATE 16, 2: PRINT "x0="; x1; "  y0="; y1; "  - начальная численность"
LOCATE 4, 60: PRINT "s2="; s2
LOCATE 5, 60: PRINT "s1="; s1

GOSUB 3000

END

1000 : 'Подпрограмма построения системы координат t
SCREEN 12                 'графический экран
mt = 100: mx = 100          'масштаб: пикселей в единице
t0 = 50: x0 = 200         'начало координат в пикселях на экране

LINE (t0, x0)-(620, x0)         'координатные оси
LINE (t0, x0)-(t0, x0 - 10 * mx)

'разметка и обозначение осей xt
FOR t = 1 TO 5
PSET (t0 + t * mt, x0 - 2)
```

```
IF ABS(t - 10) < .02 THEN CIRCLE (t0 + t * mt, x0), 3
NEXT t

FOR x = 0 TO 7 STEP 1
PSET (t0 - 2, x0 - x * mx)
NEXT x

LOCATE 12, 73: PRINT "t"
LOCATE 2, 10: PRINT "x,y"
LOCATE 14, 19: PRINT "1"
LOCATE 6, 5: PRINT "1"
RETURN


3000 :                          'подпрограмма вывода комментариев
LOCATE 17, 2: PRINT "  Простейшая модель вооруженной борьбы"
LOCATE 17, 40: PRINT " Ланчестера 1-го рода между противни-"
LOCATE 18, 2: PRINT "ком - 1 и противником - 2. Дифференциа"
LOCATE 18, 40: PRINT "льные уравнения модели имеют вид:     "
LOCATE 19, 2: PRINT "    dx/dt=-s2*y,    dy/dt=-s1*x, при  "
LOCATE 19, 40: PRINT "x(0)=x0, y(0)=y0.                (*)  "
LOCATE 20, 2: PRINT " Пусть p1 - вероятность с которой кажд"
LOCATE 20, 40: PRINT "ая боевая единица противника-1  при  "
LOCATE 21, 2: PRINT "каждом выстреле поражает боевую единиц"
LOCATE 21, 40: PRINT "у противника-2, a1 - скорострельность"
LOCATE 22, 2: PRINT "БЕ П-1, m1 - численность П-1 в момент "
LOCATE 22, 40: PRINT "t, dt - временной промежуток на кото-"
LOCATE 23, 2: PRINT "ром определяются потери противника-2. "
LOCATE 23, 40: PRINT "Одна БЕ П-1 делает на промежутке dt  "
LOCATE 24, 2: PRINT "a1*dt выстрелов. Математическое ожидан"
LOCATE 24, 40: PRINT "ие числа выведенных из строя БЕ П-2  "
LOCATE 25, 2: PRINT "принимаем равным p1*a1*dt*m1. Но это  "
LOCATE 25, 40: PRINT "есть изменение численности БЕ П-2, т."
LOCATE 26, 2: PRINT "е. -dm2. Следовательно, dm2=-p1*a1*m1*"
LOCATE 26, 40: PRINT "dt или dm2/dt=-p1*a1*m1. Аналогично  "
LOCATE 27, 2: PRINT "получаются уравнения dm1/dt=-p2*a2*m2."
LOCATE 27, 40: PRINT "Обозначим x=m1 и y=m2, s1=a1*p1 и    "
LOCATE 28, 2: PRINT "s2=a2*p2. Получим уравнения (*).      "
LOCATE 28, 40: PRINT " "
RETURN
```



x0= 1.06 y0= 1 - начальная численность

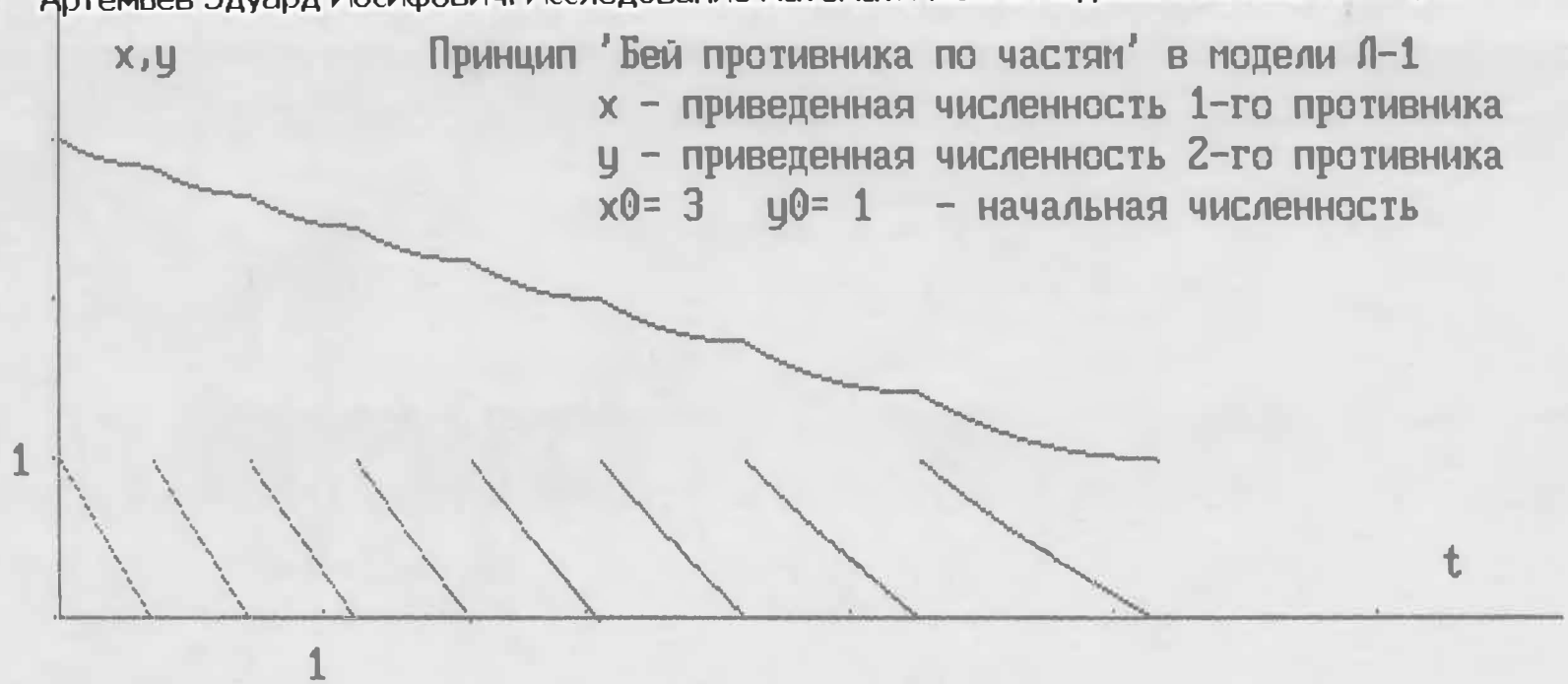
Простейшая модель вооруженной борьбы Ланчестера 1-го рода между противником - 1 и противником - 2. Дифференциальные уравнения модели имеют вид:

dx/dt=-y, dy/dt=-x, при x(0)=x0, y(0)=y0. (*)

Пусть p1 - вероятность с которой каждая боевая единица противника-1 при каждом выстреле поражает боевую единицу противника-2, a1 - скорострельность БЕ П-1, m1 - численность П-1 в момент T, dT - временной промежуток на котором определяются потери противника-2. Одна БЕ П-1 делает на промежутке dT a1*dT выстрелов. Математическое ожидание числа выведенных из строя БЕ П-2 принимаем равным p1*a1*dT*m1. Но это есть изменение численности БЕ П-2, т. е. -dm2. Следовательно, dm2=-p1*a1*m1*dT или dm2/dT=-p1*a1*m1. Аналогично получаются уравнения dm1/dT=-p2*a2*m2.Обозначим x=m1*(a1*p1)^0.5, и y=m2*(a2*p2)^0.2,t=T*(a1*a2*p1*p2)^0.5 - получим уравнения (*).

```
'...                                        ...
'Модель Ланчестера 1-го рода - это одна из
'простейших моделей вооруженной борьбы.
'Построение зависимости численности x( t) противника - 1,
'и численности y (t) противника - 2.
'Построение фазовой траектории F(x,y)=0 методом Рунге-Кутта.
'Здесь используется понятие приведенной численности.

GOSUB 1000 'Подпрограмма построения системы координат

'правая часть диффуравнения изменения численности
'первого противника
DEF fnfx (x, y) = -y
'правая часть диффуравнения изменения численности
'второго противника
DEF fnfy (x, y) = -x

dt = .01      'время конечное и приращение времени

t = 0: x = 1.06: y = 1        'начальные условия
x1 = x: y1 = y                'вывода начальных данных
'Метод Рунге-Кутта
xo = x: yo = y

FOR i = 1 TO 250              'цикл изменения времени
IF x <= 0 OR y <= 0 THEN i = 500
t = t + dt
kx1 = fnfx(x, y) * dt
ky1 = fnfy(x, y) * dt
kx2 = fnfx(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
ky2 = fnfy(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
kx3 = fnfx(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
ky3 = fnfy(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
kx4 = fnfx(x + kx3, y + ky3) * dt
ky4 = fnfy(x + kx3, y + ky3) * dt
'приращение количества противника - 1
dx = (kx1 + 2 * kx2 + 2 * kx3 + kx4) / 6
'приращение количества противника - 2
dy = (ky1 + 2 * ky2 + 2 * ky3 + ky4) / 6
x = x + dx
y = y + dy
PSET (t0 + t * mt, x0 - x * mx)  'точка графика противника - 1
PSET (t0 + t * mt, x0 - y * mx)  'точка графика противника - 2
NEXT i



'Вывод комментариев и начальных данных
LOCATE 2, 25: PRINT "Модель Ланчестера 1-го рода с приведенной численнос
LOCATE 9, 33: PRINT "x - приведенная численность 1-го противника"
LOCATE 11, 33: PRINT "y - приведенная численность 2-го противника"
LOCATE 16, 2: PRINT "x0="; x1; "  y0="; y1; "  - начальная численность"

GOSUB 3000

END

1000 : 'Подпрограмма построения системы координат t
SCREEN 12                 'графический экран
mt = 100: mx = 100          'масштаб: пикселей в единице
t0 = 50: x0 = 200         'начало координат в пикселях на экране

LINE (t0, x0)-(620, x0)         'координатные оси
LINE (t0, x0)-(t0, x0 - 10 * mx)

'разметка и обозначение осей xt
FOR t = 1 TO 5
PSET (t0 + t * mt, x0 - 2)
IF ABS(t - 10) < .02 THEN CIRCLE (t0 + t * mt, x0), 3
NEXT t
```

```
FOR x = 0 TO 7 STEP 1
PSET (t0 - 2, x0 - x * mx)
NEXT x

LOCATE 12, 73: PRINT "t"
LOCATE 2, 10: PRINT "x,y"
LOCATE 14, 19: PRINT "1"
LOCATE 6, 5: PRINT "1"
RETURN


3000 :                          'подпрограмма вывода комментариев
LOCATE 17, 2: PRINT "  Простейшая модель вооруженной борьбы"
LOCATE 17, 40: PRINT " Ланчестера 1-го рода между противни-"
LOCATE 18, 2: PRINT "ком - 1 и противником - 2. Дифференциа"
LOCATE 18, 40: PRINT "льные уравнения модели имеют вид:     "
LOCATE 19, 2: PRINT "     dx/dt=-y,     dy/dt=-x,        при  "
LOCATE 19, 40: PRINT "x(0)=x0, y(0)=y0.                (*)   "
LOCATE 20, 2: PRINT " Пусть p1 - вероятность о которой кажд"
LOCATE 20, 40: PRINT "ая боевая единица противника-1  при   "
LOCATE 21, 2: PRINT "каждом выстреле поражает боевую единиц"
LOCATE 21, 40: PRINT "у противника-2, a1 - скорострельность"
LOCATE 22, 2: PRINT "БЕ П-1, m1 - численность П-1 в момент "
LOCATE 22, 40: PRINT "T, dT - временной промежуток на кото-"
LOCATE 23, 2: PRINT "ром определяются потери противника-2. "
LOCATE 23, 40: PRINT "Одна БЕ П-1 делает на промежутке dT  "
LOCATE 24, 2: PRINT "a1*dT выстрелов. Математическое ожидан"
LOCATE 24, 40: PRINT "ие числа выведенных из строя БЕ П-2  "
LOCATE 25, 2: PRINT "принимаем равным p1*a1*dT*m1. Но это  "
LOCATE 25, 40: PRINT "есть изменение численности БЕ П-2, т."
LOCATE 26, 2: PRINT "е. -dm2. Следовательно, dm2=-p1*a1*m1*"
LOCATE 26, 40: PRINT "dT или dm2/dT=-p1*a1*m1. Аналогично  "
LOCATE 27, 2: PRINT "получаются уравнения dm1/dT=-p2*a2*m2."
LOCATE 27, 40: PRINT "Обозначим x=m1*(a1*p1)^0.5, и        "
LOCATE 28, 2: PRINT "y=m2*(a2*p2)^0.2,t=T*(a1*a2*p1*p2)^0.5"
LOCATE 28, 40: PRINT " - получим уравнения (*).            "
RETURN
```



xi= 3 2.83 2.65 2.45 2.24 2.00 1.73 1.41 1.00

Согласно модели Ланчестера 1-го рода при вступлении в конфликт всех БЕ П-1 и всех БЕ П-2, выигрывает тот противник , чья начальная ПРИВЕДЕННАЯ ЧМСЛЕННОСТЬ была выше. Напомним, что ПРИВЕДЕННАЯ ЧИСЛЕННОСТЬ x=m1*s1,y=m2*s2,где s1=a1*p1 и s2=a2*p2 - есть характеристики технической вооруженности противников; m1,m2 - собственно численности боевых единиц. Выходит, что в самом начале следует капитулировать противнику с меньшей приведенной численностью? - Нет!

Здесь приведена драмма поражения противника-2 с начальной приведенной численностью y=8 более слабому противнику-1 с начальной приведенной численностью x=3.

Коварство слабого противника заключается в том, что он ухитряется бить противника по частям. Каждый раз он выбирает группировку противника с приведенной численностью равной 1 и уничтожает ее. Затем переключается на следующую группу.

Под гракфиком приведены значения прив.числ. П-1 перед очередной акцией.

```
'...                                        ...
'Модель Ланчестера 1-го рода.
'Построение зависимости численности x(t) противника - 1,
'и численности y (t) противника - 2.
'Здесь используется понятие приведенной численности.
'В данной программе моделируется принцип тактики:
'"Бей противника по частям", когда слабая сторона
'выбирает часть противника с меньшей приведенной
'численностью, уничтожает ее и принимается за уничтожение
'другой части противника с приведенной численностью
'достаточно малой для победы.

GOSUB 1000 'Подпрограмма построения системы координат

'правая часть диффуравнения изменения численности
'первого противника
DEF fnfx (x, y) = -y
'правая часть диффуравнения изменения численности
'второго противника
DEF fnfy (x, y) = -x

dt = .01      'время конечное и приращение времени

t = 0: x = 3: y = 1        'начальные условия
x1 = x: y1 = y               'вывода начальных данных
'Метод Рунге-Кутта
xo = x: yo = y
LOCATE 15, 1: PRINT "xi="; x1;
FOR i = 1 TO 500            'цикл изменения времени
IF y <= 0 THEN y = y1: PRINT USING "####.##"; x;
IF y <= 0 OR x <= 1! THEN i = 500
t = t + dt
kx1 = fnfx(x, y) * dt
ky1 = fnfy(x, y) * dt
kx2 = fnfx(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
ky2 = fnfy(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
kx3 = fnfx(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
ky3 = fnfy(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
kx4 = fnfx(x + kx3, y + ky3) * dt
ky4 = fnfy(x + kx3, y + ky3) * dt
'приращение количества противника - 1
dx = (kx1 + 2 * kx2 + 2 * kx3 + kx4) / 6
'приращение количества противника - 2
dy = (ky1 + 2 * ky2 + 2 * ky3 + ky4) / 6
x = x + dx
y = y + dy
PSET (t0 + t * mt, x0 - x * mx)  'точка графика противника - 1
PSET (t0 + t * mt, x0 - y * mx)  'точка графика противника - 2
NEXT i
PRINT



'Вывод комментариев и начальных данных
LOCATE 2, 25: PRINT "Принцип 'Бей противника по частям' в модели Л-1"
LOCATE 3, 33: PRINT "x - приведенная численность 1-го противника"
LOCATE 4, 33: PRINT "y - приведенная численность 2-го противника"
LOCATE 5, 33: PRINT "x0="; x1; "  y0="; y1; "  - начальная численность"

GOSUB 3000

END
```

```
1000 : 'Подпрограмма построения системы координат t
SCREEN 12                'графический экран
mt = 100: mx = 50         'масштаб: пикселей в единице
t0 = 50: x0 = 200        'начало координат в пикселях на экране

LINE (t0, x0)-(620, x0)        'координатные оси
LINE (t0, x0)-(t0, x0 - 10 * mx)

'разметка и обозначение осей xt
FOR t = 1 TO 5
PSET (t0 + t * mt, x0 - 2)
IF ABS(t - 10) < .02 THEN CIRCLE (t0 + t * mt, x0), 3
NEXT t

FOR x = 0 TO 7 STEP 1
PSET (t0 - 2, x0 - x * mx)
NEXT x

LOCATE 12, 73: PRINT "t"
LOCATE 2, 10: PRINT "x,y"
LOCATE 14, 19: PRINT "1"
LOCATE 10, 5: PRINT "1"
RETURN


3000 :                        'подпрограмма вывода комментариев
LOCATE 17, 1: PRINT "  Согласно модели Ланчестера 1-го рода  "
LOCATE 17, 41: PRINT "при вступлении в конфликт всех БЕ П-1  "
LOCATE 18, 1: PRINT "и всех БЕ П-2, выигрывает тот противник "
LOCATE 18, 41: PRINT ", чья начальная ПРИВЕДЕННАЯ ЧМСЛЕННОСТЬ"
LOCATE 19, 1: PRINT "была выше. Напомним, что ПРИВЕДЕННАЯ ЧИС"
LOCATE 19, 41: PRINT "ЛЕННОСТЬ x=m1*s1,y=m2*s2,где s1=a1*p1  "
LOCATE 20, 1: PRINT "и s2=a2*p2 - есть характеристики техниче"
LOCATE 20, 41: PRINT "ской вооруженности противников; m1,m2 -"
LOCATE 21, 1: PRINT "собственно численности боевых единиц.   "
LOCATE 21, 41: PRINT "Выходит, что  в самом начале следует   "
LOCATE 22, 1: PRINT "капитулировать противнику с меньшей  при"
LOCATE 22, 41: PRINT "веденной численностью?     - Нет!      "
LOCATE 23, 1: PRINT "  Здесь приведена драмма поражения проти"
LOCATE 23, 41: PRINT "вника-2 с начальной приведенной числен-"
LOCATE 24, 1: PRINT "ностью y=8 более слабому противнику-1 с "
LOCATE 24, 41: PRINT "начальной приведенной численностью x=3."
LOCATE 25, 1: PRINT "   Коварство слабого противника заключае"
LOCATE 25, 41: PRINT "тся в том, что он ухитряется бить про- "
LOCATE 26, 1: PRINT "тивника по частям. Каждый раз он выбирае"
LOCATE 26, 41: PRINT "т группировку противника с приведенной "
LOCATE 27, 1: PRINT "численностью равной 1 и уничтожает ее. З"
LOCATE 27, 41: PRINT "атем переключается на следующую группу."
LOCATE 28, 1: PRINT "  Под гракфиком приведены значения прив."
LOCATE 28, 41: PRINT "числ. П-1 перед очередной акцией.    "
RETURN
```

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Модель Ланчестера 2-го рода.

Рассмотрим несколько другую ситуацию, которая, очевидно, достаточно часто имеет место. Пусть каждый из противников не видит конкретных боевых единиц другого противника, а знает лишь область, где они расположены. Конфигурация области $D_1(D_2)$, где расположены боевые единицы противника A(B) несущественна. Обозначим площадь области $D_1(D_2)$ через $S_1(S_2)$. Введем в рассмотрение величину $l_1=\sqrt{S_1}$ $\left[l_2=\sqrt{S_2}\right]$. Эта величина характерезует по порядку линейный размер области $D_1(D_2)$. Будем считать, что характерный линейный размер $r_1(r_2)$ боевой единицы противника A(B) меньше величины $l_1(l_2)$:

$$r_1<l_1 \quad \left[r_2<l_2\right]. \qquad (20)$$

Предположим, что при попадании боезапаса противника B(A) в область $D_1(D_2)$ все боевые единицы потивника A(B), оказавшиеся внутри круга площади $\delta_2(\delta_1)$ с центром в точке попадания, выходят из строя с вероятностью $Q_2(Q_1)$, а боевые единицы, находящиеся за

пределами этого круга остаются совершенно непораженными. Очевидно, что эти предположения содержат также предположение о том, что

$$r_1 < \sqrt{\delta_2} \quad \left[r_2 < \sqrt{\delta_1}\right], \qquad (21)$$

т.е. характерный линейный размер боевой единицы меньше по порядку величины характерного линейного размера площади поражения. Предположим, далее, что характерное расстояние $d_1(d_2)$ между боевыми единицами больше линейного размера площади поражения:

$$d_1 < \sqrt{\delta_2} \quad \left[d_2 < \sqrt{\delta_1}\right]. \qquad (22)$$

Это предположение позволяет считать, что каждый выстрел может вывести из строя лишь одну боевую единицу.

Предположим, наконец, что противник B(A) ведет стрельбу так, что при каждом выстреле попадание в окрестность любой точки $d_1(d_2)$ области пропорционально площади этой окрестности и что характерная величина рассеивания при стрельбе $\gamma_1(\gamma_2)$ по порядку величины меньше линейного размера $l_1(l_2)$ области $d_1(d_2)$:

$$\gamma_1 < l_1 \quad \left[\gamma_2 < l_2\right]. \qquad (23)$$

Пусть в некоторый момент времени t численность боевых единиц противников равна $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Из сделанных предположений следует, что вероятность $p_2(p_1)$ вывода из строя единицы противника A(B) при выстреле единицы противника B(A), совершенном в момент времени t, равна $m_1(t)*\delta_2*Q_2/S_1$ $\left[m_2(t)*\delta_1*Q_1/S_2\right]$. Рассуждения, аналогичные тем, которые были выполнены для модели Ланчестера 1-го рода, дают основание постулировать в рассматриваемом случае следующую модель

$$\begin{cases} dm_1/dt = -(\alpha_2*\delta_2*Q_2/S_1)*m_1*m_2, & (24) \\ dm_2/dt = -(\alpha_1*\delta_1*Q_1/S_2)*m_1*m_2, & (25) \end{cases}$$

$$m_1(0) = m_{10}, \qquad (26)$$

$$m_2(0) = m_{20}, \qquad (27)$$

получающуюся подстановкой в соотношения (3)-(6) модели Ланчестера 1-го рода вместо $p_2(p_1)$ величины $m_1(t)*\delta_2*Q_2/S_1$ $\left[m_2(t)*\delta_1*Q_1/S_2\right]$. Вводя обозначения

$$f_1 = \alpha_1 * \delta_1 * Q_1 / S_2, \qquad (28)$$

$$f_2 = \alpha_2 * \delta_2 * Q_2 / S_1 \qquad (29)$$

получаем

$$\begin{cases} dm_1/dt = -f_2 * m_1 * m_2, & (30) \\ dm_2/dt = -f_1 * m_1 * m_2. & (31) \end{cases}$$

$$m_1(0) = m_{10}, \qquad (32)$$

$$m_2(0) = m_{20}. \qquad (33)$$

Уравнения (30)-(33) принято называть уравнениями Ланчестера 2-го рода.

Соотношения вида (30)-(33) описывают процесс вывода из строя боевых единиц не только при сформулированных в этом разделе предположениях. Например, фактически ничего не изменится в рассуждениях, если отказаться от предположения (22), но считать, что боевые единицы противников равномерно распределены по соответствующим областям. В этом случае величина $m_1(t)*\delta_2*Q_2/S_1$ $\left[m_2(t)*\delta_1*Q_1/S_2\right]$ будет характеризовать математическое ожидание количества выведенных из строя боевых единиц стороны A(B) при одном выстреле единицы противника B(A), совершенном в момент t. Еще одним примером является ситуация, когда боевые единицы хотя и видят противника, но не имеют информации о результатах своих выстрелов, и т.д.

Может сложиться ситуация, когда часть боевых единиц находится в одних информационных условиях, другая часть - в других. В этом случае процесс выхода из строя боевых единиц описывается моделью, обобщающей модели (3)-(6) и (30)-(33):

$$\begin{cases} dm_1/dt = -k_2 * \delta_2 * m_2 - f_2 * m_1 * m_2, & (34) \\ dm_2/dt = -k_1 * \delta_1 * m_1 - f_1 * m_1 * m_2. & (35) \end{cases}$$

$$m_1(0) = m_{10}, \qquad (36)$$

$$m_2(0) = m_{20}. \qquad (37)$$

Исследуя процесс, описываемый этими соотношениями, начнем со случая $\delta_1=\delta_2=0$, т.е. с модели Ланчестера 2-го рода (30)-(33). Естественно сделать следующую замену искомых функций:

$$n_1 = m_1 * f_1, \qquad n_2 = m_2 * f_2, \qquad (38)$$

в результате которой соотношения (30)-(33) примут вид

$$\begin{cases} dn_1/dt = -n_1*n_2, & (39) \\ dn_2/dt = -n_1*n_2. & (40) \end{cases}$$

$$n_1(0) = n_{10}, \qquad (41)$$

$$n_2(0) = n_{20}. \qquad (42)$$

Величины n_1 и n_2, как и прежде, будем называть приведенными численностями. В данном случае не зависящий от времени интеграл ситемы (39), (40) получается вычитанием этих уравнений друг из друга, что дает

$$n_1(t)-n_2(t) = n_{10}-n_{20}. \qquad (43)$$

Таким образом, в рассматриваемом взаимодействии сохраняется разность приведенных численностей. Поэтому тот противник, у которого в начале процесса привеленная численность была больше, будет сохранять это преимущество в течение всего процесса.

Найдем явные выражения для функций $n_1(t)$, $n_2(t)$, удовлетворяющих (39)-(42). Для этого выразим $n_2(t)$ из (43) и подставим получившееся выражение в (39). Получим

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1*(n_1-\Delta_0), \qquad (44)$$

где

$$\Delta_0 = n_{10}-n_{20} \qquad (45)$$

начальная разность приведенных сил. При интегрировании уравнения (44) следует различать два случая: а) $\Delta_0=0$ и б) $\Delta_0\neq0$. В случае а), как нетрудно видеть,

$$n_1(t)=n_2(t)=n_{10}/(n_{10}*t+1). \qquad (46)$$

Общий характер решения похож на решение $n_1=n_2=n_{10}*\exp(-t)$ уравнений Ланчестера 1-го рода в случае равенства приведенных сил, однако, стремление к нулю приведенных численностей при увеличении времени происходит менее интенсивно, что объясняется уменьшением вероятности поражения при уменьшении численностей.

Рассмотрим теперь основной случай, когда $\Delta_0\neq0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\Delta_0>0$. Уравнение (44) перепишем в виде

$$\frac{dn_1}{(n_1-\Delta_0)} - \frac{dn_1}{n_1} = -\Delta_0*dt. \qquad (47)$$

Интегрируя (47) с учетом начальных условий (41), (42), используя затем (43), получаем

$$n_1(t) = n_{10}*\Delta_0/(n_{10}-n_{20}*\exp(-\Delta_0*t)), \qquad (48)$$

$$n_2(t) = n_{20}*\Delta_0*\exp(-\Delta_0*t)/(n_{10}-n_{20}*\exp(-\Delta_0*t)). \qquad (49)$$

Итак, величина $n_1(t)$, в соответствии с (48), монотонно уменьшается от n_{10} до $n_{10}-n_{20}$, величина $n_2(t)$ монотонно уменьшается от n_{20} до нуля.

Существенное отличие рассматриваемого процесса от того, который описывается уравнениями Ланчестера 1-го рода, состоит в том, что численность более слабого противника обращается в ноль лишь при $t=\infty$. Однако, так же как и для уравнений Ланчестера 1-го рода предположения, сделанные при выводе уравнений (39)-(42), справедливы лишь тогда, когда численности $n_1(t)$ и $n_2(t)$ достаточно велики.

Для процесса, описываемого уравнениями Ланчестера 2-го рода, принцип БПЧ, о котором шла речь в предыдущем разделе, не имеет места. В самом деле, если $n_{10}=n_{20}$ и противник А вступает во взаимодействие сначала с половиной $n_{20}/2$ сил противника В, а затем оставшимися силами со второй половиной, то, в соответствии с (43) у него после первого взаимодействия останется $n_{10}/2$ сил и никакого выигрыша от такой организации процесса он иметь не будет. Некоторое неудовлетворение в этих рассуждениях вызывает то обстоятельство, что первое взаимодействие окончится лишь при $t=\infty$. Видоизменим рассуждения следующим образом. Будем считать, что в первом взаимодействии противник А вступает в бой с количеством $x*n_{20}$ сил противника В, где $0<x<1$. Остальные $(1-x)*n_{20}$ сил противника В находятся в резерве. Пусть первое взаимодействие продолжается некоторое время t. Обозначим количество сил у противников А и В после первого взаимодействия через n_{11} и n_{21}. Из (43) вытекает, что эти величины связаны с n_{10} и x соотношением

$$n_{21}= n_{11}- n_{10}*(1-x). \qquad (50)$$

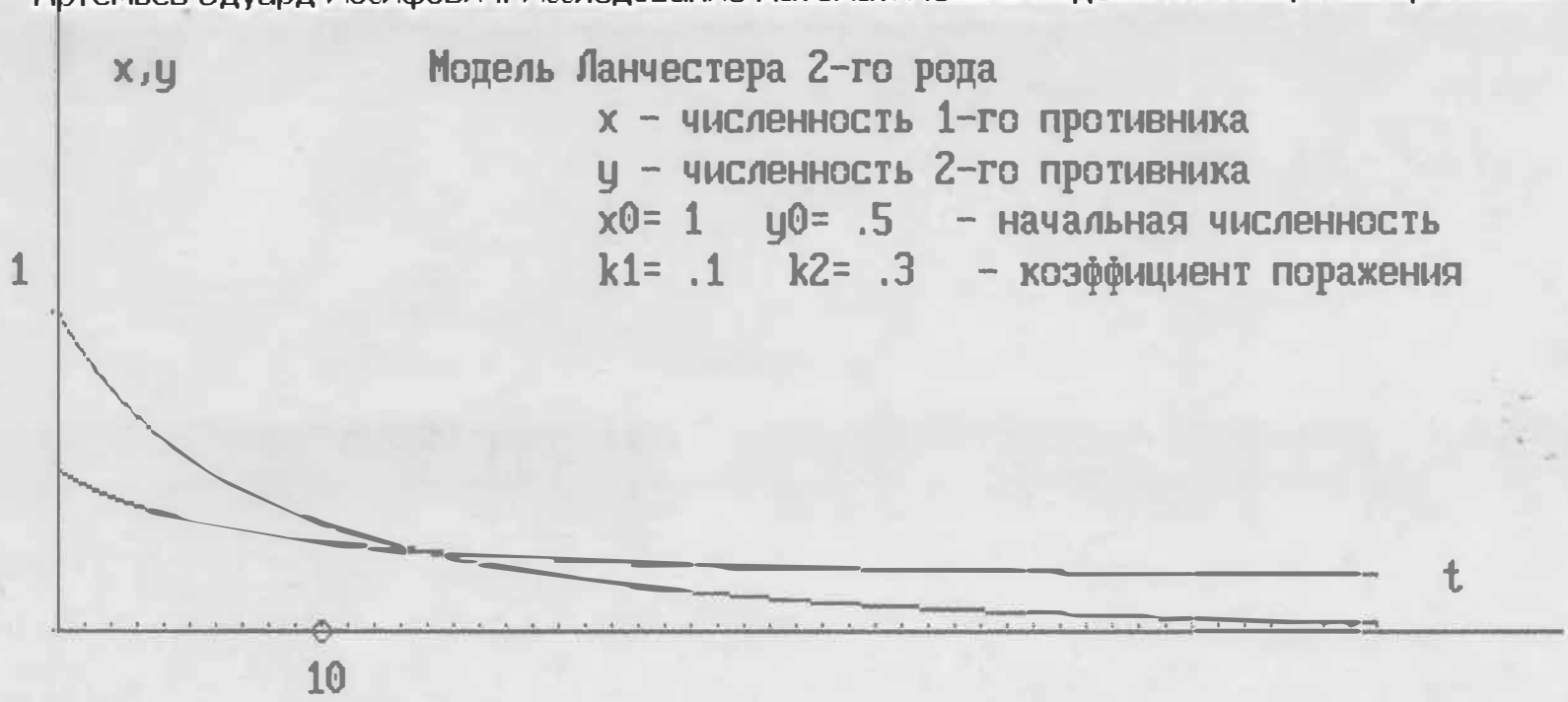
Во втором взаимодействии оставшиеся после первого взаимодействия

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

силы противника В в количестве n_{21} объединяются с резервом, количество которого равно $(1-x)*n_{20}$. В результате в начале второго взаимодействия у противника В будет в силу (50), $n_{21}+n_{10}*(1-x)=n_{11}$ сил - ровно столько же, сколько и у противника А. Тот факт, что некоторое время все силы противника А взаимодействовали с частью сил противника В, никакого влияния на характер процесса не оказал.

В точно такой же ситуации, если бы процесс описывался уравнениями Ланчестера 1-го рода, выиграл бы, очевидно, противник А.

Интересен вопрос о том, имеет ли место принцип БПЧ для модели (34)-(37). Интуитивно ясно, что ответ на этот вопрос должен быть положительным, однако исследование этого факта мы не успели провести.



Модель вооруженной борьбы Ланчестера 2-го рода. Дифференциальные ур-ния модели: dx/dt=-k2*x*y, dy/dt=-k1*x*y, при x(0)=x0, y(0)=y0. (*)
p2 - вероятность вывода из строя БЕ-1 при выстреле БЕ П-2. x,y - численности боевых единиц противников. a1,a2 - скорострельности БЕ противников.
c2 - площадь круга поражаемая при выстреле БЕ-2; q2 - вероятность того,что все БЕ П-1, оказавшиеся в круге c2, выходят из строя; S1 - площадь области,на которой распределены все БЕ П-1.Тогда можно обозначить p2=x*c2*q2/S1.

Аналогично получим p1=y*c1*q1/S2.Уравнения (*) получаются из уравнений Ланчестера 1-го рода. Заметим, что k2=c2*q2/S1 - часть П-1, уничтожаемая при выстреле одной БЕ П-2. Существенное отличие динамики конфликта от модели 1-го рода заключается в том, что численность более слабого противника обращается в ноль асимптотически.

```
'...                                        ...
'Модель Ланчестера 2-го рода вооруженной борьбы.
'Построение зависимости численности x(t) противника - 1,
'и численности y (t) противника - 2.

GOSUB 1000 'Подпрограмма построения системы координат

'правая часть диффуравнения изменения численности
'первого противника
DEF fnfx (x, y) = -k2 * x * y
'правая часть диффуравнения изменения численности
'второго противника
DEF fnfy (x, y) = -k1 * x * y

dt = .1      'время конечное и приращение времени

t = 0: x = 1!: y = .5        'начальные условия
x1 = x: y1 = y               'вывода начальных данных
k1 = .1          'часть П-2, поражаемая выстрелом БЕ-1
k2 = .3          'часть П-1, поражаемая выстрелом БЕ-2
'Метод Рунге-Кутта
xo = x: yo = y

FOR i = 1 TO 500             'цикл изменения времени
t = t + dt
kx1 = fnfx(x, y) * dt
ky1 = fnfy(x, y) * dt
kx2 = fnfx(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
ky2 = fnfy(x + kx1 / 2, y + ky1 / 2) * dt
kx3 = fnfx(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
ky3 = fnfy(x + kx2 / 2, y + ky2 / 2) * dt
kx4 = fnfx(x + kx3, y + ky3) * dt
ky4 = fnfy(x + kx3, y + ky3) * dt
'приращение количества противника - 1
dx = (kx1 + 2 * kx2 + 2 * kx3 + kx4) / 6
'приращение количества противника - 2
dy = (ky1 + 2 * ky2 + 2 * ky3 + ky4) / 6
x = x + dx
y = y + dy
PSET (t0 + t * mt, x0 - x * mx)  'точка графика противника - 1
PSET (t0 + t * mt, x0 - y * mx)  'точка графика противника - 2
NEXT i



'Вывод комментариев и начальных данных
LOCATE 2, 25: PRINT "Модель Ланчестера 2-го рода "
LOCATE 3, 33: PRINT "x - численность 1-го противника"
LOCATE 4, 33: PRINT "y - численность 2-го противника"
LOCATE 5, 33: PRINT "x0="; x1; "  y0="; y1; "  - начальная численность"
LOCATE 6, 33: PRINT "k1="; k1; "  k2="; k2; "  - коэффициент поражения"

GOSUB 3000

END

1000 : 'Подпрограмма построения системы координат t
SCREEN 12                    'графический экран
mt = 10: mx = 100          'масштаб: пикселей в единице
t0 = 50: x0 = 200           'начало координат в пикселях на экране
```

```
LINE (t0, x0)-(620, x0)        'координатные оси
LINE (t0, x0)-(t0, x0 - 10 * mx)

'разметка и обозначение осей xt
FOR t = 1 TO 50
PSET (t0 + t * mt, x0 - 2)
IF ABS( t - 10) < .02 THEN CIRCLE (t0 + t * mt, x0), 3
NEXT t

FOR x = 0 TO 7 STEP 1
PSET (t0 - 2, x0 - x * mx)
NEXT x

LOCATE 12, 73: PRINT "t"
LOCATE 2, 10: PRINT "x,y"
LOCATE 14, 19: PRINT "10"
LOCATE 6, 5: PRINT "1"
RETURN


3000 :                        'подпрограмма вывода комментариев
LOCATE 17, 2: PRINT "  Модель вооруженной борьбы Ланчестера"
LOCATE 17, 40: PRINT " 2-го рода. Дифференциальные ур-ния  "
LOCATE 18, 2: PRINT "модели: dx/dt=-k2*x*y, dy/dt=-k1*x*y, "
LOCATE 18, 40: PRINT "при x(0)=x0, y(0)=y0.       (*)       "
LOCATE 19, 2: PRINT "p2 - вероятность вывода из строя БЕ-1 "
LOCATE 19, 40: PRINT "при выстреле БЕ П-2. x,y - численнос-"
LOCATE 20, 2: PRINT "ти боевых единиц противников. a1,a2 - "
LOCATE 20, 40: PRINT "скорострельности БЕ противников.     "
LOCATE 21, 2: PRINT "c2 - площадь круга поражаемая при выст"
LOCATE 21, 40: PRINT "реле БЕ-2; q2 - вероятность того,что "
LOCATE 22, 2: PRINT "все БЕ П-1, оказавшиеся в круге c2,   "
LOCATE 22, 40: PRINT "выходят из строя; S1 - площадь облас-"
LOCATE 23, 2: PRINT "ти,на которой распределены все БЕ П-1."
LOCATE 23, 40: PRINT "Тогда можно обозначить p2=x*c2*q2/S1."
LOCATE 24, 2: PRINT "     Аналогично получим p1=y*c1*q1/S2."
LOCATE 24, 40: PRINT "Уравнения (*) получаются из уравнений"
LOCATE 25, 2: PRINT " Ланчестера 1-го рода. Заметим, что   "
LOCATE 25, 40: PRINT "k2=c2*q2/S1 - часть  П-1, уничтожа-  "
LOCATE 26, 2: PRINT "емая при выстреле одной БЕ П-2."
LOCATE 26, 40: PRINT "Существенное отличие динамики конфли-"
LOCATE 27, 2: PRINT "кта от модели 1-го рода заключается в "
LOCATE 27, 40: PRINT "том, что численность более слабого   "
LOCATE 28, 2: PRINT "противника обращается в ноль асимптоти"
LOCATE 28, 40: PRINT "чески.                               "
RETURN
```


Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Литература:

1) Абрамов А.М., Виленкин Н.Я., Дорофеев Г.В., Егоров А.А. Земляков А.Н., Мордкович А.Г. "Избранные вопросы математики: 10 кл". Факультативный курс (Сост.: С.И.Шварцбурд) под ред. Фирсова В.В. - М.: Просвещение, 1980 г.- 191 с.

2) Амелькин В.В. "Дифференциальные уравнения в приложениях". - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987 г. - 160 с.

3) Иванилов В.Ю., Огарышев В.Ф., Павловский Ю.Н. "Имитация конфликтов". - М.: ВЦ РАН, 1993 г. - 196 с.

4) Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перстюк Н.А. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи". Учеб. пособие. - М. Высш. шк., 1989 г. - 383 с.: ил.

5) Хайрер Э., Нерсетт, Ваннер Г. "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений". - М.: Мир, 1990 г. - 512 с.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Содержание.

Введение 2
Уравнение Мальтуса 3
Уравнение Ферхюльста-Перла 6
Модель Полетаева 12
Интегро-дифференциальные уравнения в экологии 18
Задача "Хищник-жертва" 26
Задача о двух хищниках и жертве 33
Модель Ланчестера 1-го рода 45
Модель Ланчестера 2-го рода 62
Литература 71

Отзыв

на дипломную работу Артемьева Э.И.

"Исследование математических моделей имитации конфликтов"

Математические модели на основе обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем часто оказываются эффективными при описании физико-механических явлений, когда поведение объекта определено проверенными практикой законами. Но в областях связанных с влиянием множества случайных факторов такое моделирование может показаться не столь эффективным. Однако основные закономерности поведения исследуемой системы все-таки проявляются наглядно. В данной работе на простых примерах развития одной популяции или нескольких взаимодействующих популяций исследуются влияния различных факторов, представляемых параметрами дифференциальных уравнений, на динамику численности популяций.

Перед дипломником ставилась задача проведения численных экспериментов для выявления основных закономерностей развития популяций при различных параметрах и задача наглядной графической интерпретации полученных результатов.

Дипломник рассмотрел достаточно большое число моделей, провел численные решения и привел аналитические решения. Приведены выводы о возможных вариантах развития популяций.

Работа имеет важное значение как демонстрационный материал при чтении курса "Математическое моделирование в естествознании".

Оценка "отлично".

Научные руководители:

Зав. кафедрой мататематического мододелирования ЧГУ,
д. ф.-м. н., проф. Артемьев И.Т.
18.06.98

Ст. преподаватель кафедры математического моделирования ЧГУ,
Филиппов В.И.

18.06.98 г.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Артемьев Эдуард Иосифович. Исследование математических моделей имитации конфликтов. Чебоксары, 1998.

Р Е Ц Е Н З И Я

на дипломную работу на тему:

Исследование математических моделей имитации конфликтов.

выполненная дипломником математического факультета Артемьевым Эдуардом Иосифовичем

Дипломная работа содержит 33 стр. пояснительного текста и 39 листов графической части.

В дипломной работе разработаны следующие вопросы:

Разработаны методы моделирования в экологии, биологии, а так же рассмотрены вопросы прогнозирования военных конфликтов, основанные на системах обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом особое внимание уделено качественному анализу развития конфликтов: выживание, вымирание, равновесие и колебание численности. При этом основной упор в дипломной работе делается на численное решение и графическую интерпретацию решаемых задач, а так же приводятся аналитические решения некоторых задач.

Достоинства рецензируемой дипломной работы:

Все решения рассмотренных задач проиллюстрированы графически, что позволяет делать качественный, количественный анализ и прогноз характеристик решаемых задач. Все приведенные задачи могут иметь практическое приложение во многих областях человеческой деятельности.

Недостатки рецензируемой дипломной работы:

В работе уделено мало внимания вопросам устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Оценка отлично

РЕЦЕНЗЕНТ к.ф.-м.н. Миронов П.Г