

**Артемьев Эдуард Иосифович**

**ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ПЕРЕВОЗОК НА ТЕРРИТОРИЯХ С  
НЕОДНОРОДНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ**

Чебоксары 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Постановка задачи поиска оптимальных маршрутов	4
Глава 2. Формализация задачи	6
Глава 3. Условие равновесия притоков-оттоков	8
Глава 4. Оптимизация плана перевозок	10
Глава 5. Кодирование входных данных в файле изображения	14
Заключение	17
Приложение. Результаты работы программы	18

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в России все больше и больше становятся востребованы компании оказывающие комплекс услуг по доставке грузов. Среди всего прочего, большое внимание уделяется логистике перевозок, которая включает в себя разработку схемы доставки, маршрутизацию движения транспорта, подбор вида одной или нескольких транспортных единиц, перегрузку из контейнеров, вагонов в авто транспорт или наоборот, разбивку груза в пути или доукомплектовку и так далее.

В рамках данной работы рассматривается задача построения оптимальных схем доставки какого-либо продукта от поставщиков к потребителям. От классической транспортной задачи (задача Монжа–Канторовича), она отличается учётом особенностей местности, по которой будут осуществлены перевозки: наличие дорог, препятствий, пропускная способность отдельных участков.

В работе рассмотрены методы программного решения оптимизации схемы перевозок. Полученные решения представляются в наглядном графическом виде и представляют собой схему оптимальных маршрутов, привязанных к конкретной карте местности. Представленная модель выходит далеко за рамки абстрактной задачи о доставке продукта из пункта «А» в пункт «Б».

Рассмотренный метод планирования существенно повышает КПД перевозок, снижает бюджет на доставку грузов.

Эдуард Артемьев.

05.05.2011.

# ГЛАВА 1

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМАХ ДОСТАВКИ

Рассмотрим задачу построения оптимальных схем доставки какого-либо продукта от поставщиков к потребителям.

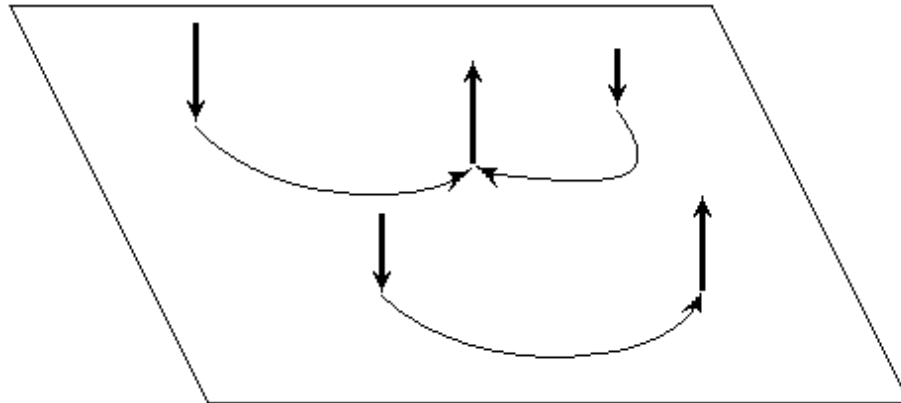


Рис. 1.1. Внешние притоки и оттоки.

Будем считать, что транспортировка продукта осуществляется на некоторой прямоугольной области. В одни точки области осуществляется приток продукта, из других точек осуществляется его отток (рис. 1.1).

Точками притока можно обозначить склады продукции или производящие предприятия, а точками оттока – торговые центры, в которых товар попадает в руки конечного потребителя.

Изначально известны координаты точек притока и оттока продукта. Также известны мощности поставщиков и потребителей, т.е. величины продукта, которые производятся (потребляются) за единицу времени.

Считаем, что сумма мощностей производителей равна сумме мощностей потребителей, т.е. речь идёт о транспортной задаче закрытого типа.

Также известны цены перевозки товара на различных участках рассматриваемой прямоугольной области. Под ценами на перевозку единицы товара на единицу расстояния можно понимать как финансовые затраты, так и затраты по времени.

Вообще, если речь идёт о денежных затратах, то характеристикой места будет являться удельная стоимость перевозки, а если речь идёт о затратах времени – пропускная способность местности.

Требуется составить оптимальный план перевозок на прямоугольной области, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Забегая вперёд, скажем, что решение задачи предполагает правильное заполнение матрицы перевозок, которая будет рассмотрена в следующей главе, и графическое построение схемы маршрутов перевозок на карте местности.

## ГЛАВА 2

### ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Для решения рассматриваемой задачи введём ряд обозначений и структур информации.

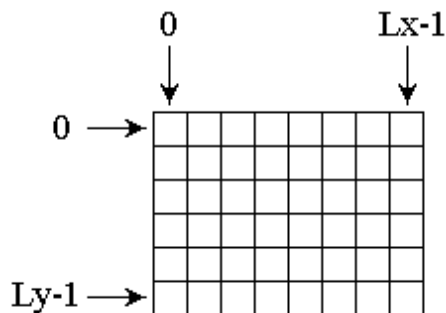


Рис. 2.1. Разбиение прямоугольной области на пиксели.

Во-первых, разобьём рассматриваемую прямоугольную область на  $Lx \times Ly$  пикселей. Таким образом мы упростим модель до перемещения продукта между четырёхсвязными прямоугольными областями. Т.е. такими областями, каждая из которых имеет только 4 соседних элемента: верхний, нижний, правый, левый.

Теперь пространство перемещений представляется прямоугольной матрицей, где продукт перемещается из одной ячейки в одну из четырёх соседних ячеек. Кстати, для хранения информации о характере таких перемещений, введём массив  $inp[x,y,i]$ , где  $x,y$  – координаты пикселя, а  $i$  – номер направления притока (рис. 2.2).

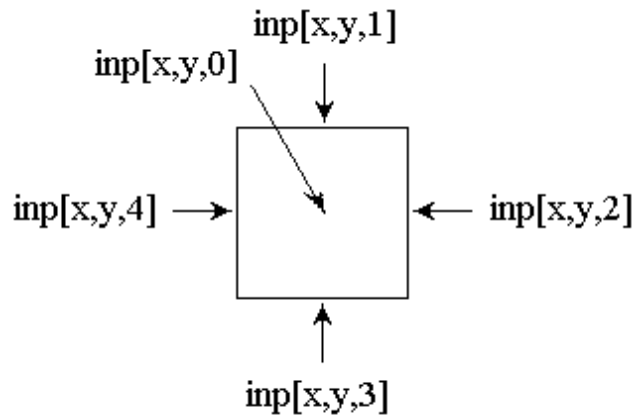


Рис. 2.2. Схема притоков к ячейке матрицы перемещений.

Отметим, что каждая ячейка имеет 5 направлений притока: один приток извне и четыре притока от соседних ячеек.

Величина притока может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Отрицательная величина притока может быть интерпретирована как отток продукта.

Так же введём массив  $price[x,y]$  для хранения информации об удельных ценах перевозок внутри пикселей. Общую стоимость перевозок по территории пикселя будем вычислять как

$$S = price[x, y] \cdot \sum_{i=0}^4 inp[x, y, i]^2 . \quad (2.1)$$

Заметим, что стоимость перевозок пропорциональна сумме квадратов притоков. Т.е. сумма квадратов притоков-оттоков рассматривается как показатель интенсивности товарооборота.

Почему именно сумма квадратов, а не суммарный приток? Такой подход объясняется удобством использования суммы квадратов для нахождения экстремумов функции стоимости, что будет показано в последующих главах. К тому же сумма квадратов является инвариантной характеристикой товарооборота в ячейке, независимой от выбора направления координатных осей.

## ГЛАВА 3

### УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПРИТОКОВ-ОТТОКОВ

На основе обозначений введённых в предыдущей главе, запишем условие равновесия притоков-оттоков. Для одного пикселя оно принимает вид

$$\sum_{i=0}^4 inp[x, y, i] = 0. \quad (3.1)$$

Т.е. равенство нулю суммы притоков ячейки является условием того, что в ней не возникнет переполнения или дефицита продукта. Иначе говоря, сумма притоков должна быть равна сумме оттоков.

Соблюдение условия равновесия каждой отдельной ячейки матрицы гарантирует равновесие матрицы транспортировок в целом.

Аналогией закона равновесия является первый закон Кирхгофа (закон токов Кирхгофа), который гласит, что алгебраическая сумма токов в любом узле любой цепи равна нулю (значения вытекающих токов берутся с обратным знаком). Иными словами, сколько тока втекает в узел, столько из него и вытекает. Данный закон следует из закона сохранения заряда. Этот закон может применяться и для других физических явлений (к примеру, водяные трубы), где есть закон сохранения величины и поток этой величины.

Любое состояние матрицы, при котором соблюдается условие равновесия притоков, является одним из возможных решений транспортной задачи, но не обязательно оптимальным.



Руководствуясь только условием равновесия притоков можно найти стартовый план перевозок продукта, после чего останется только привести его к оптимальному виду путём преобразований. Кстати, так и работает программа «Поиск оптимальных маршрутов», созданная автором:

- 1) нахождение неоптимального стартового решения, удовлетворяющего условию равновесия;
- 2) постепенная оптимизация найденного решения.

Метод оптимизации плана перевозок по стоимости будет рассмотрен в следующей главе.

## ГЛАВА 4

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК

Рассмотрим особенности оптимизации плана перевозок между четырьмя соседними ячейками матрицы транспортировок (рис. 4.1).

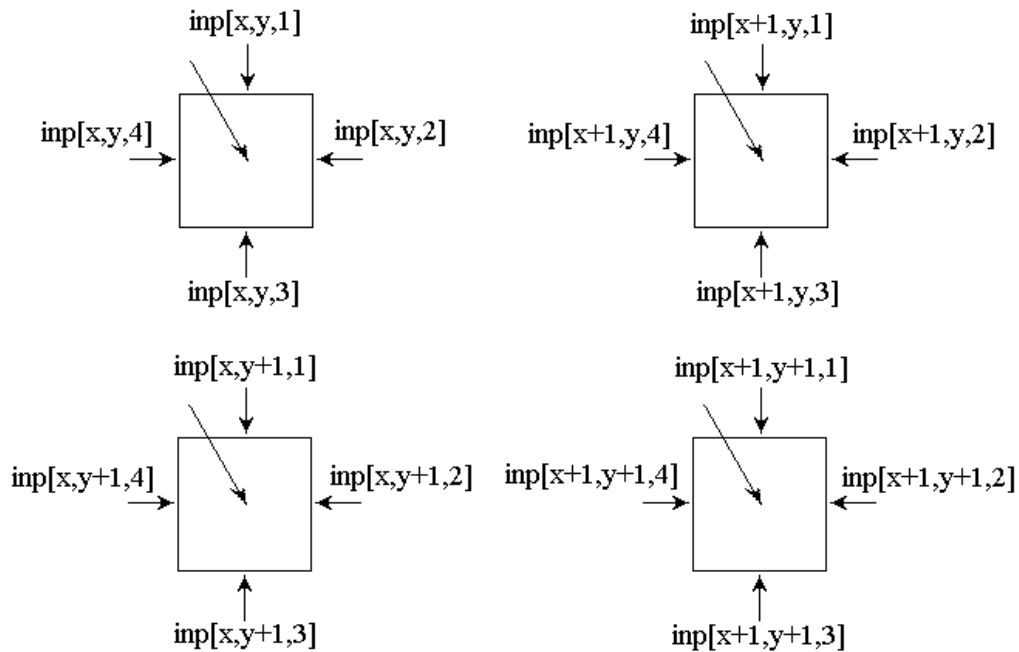


Рис. 4.1. Схема взаимодействия четырёх соседних ячеек матрицы транспортировок.

Считаем, что для каждой из этих ячеек соблюдено условие равновесия притоков-оттоков. Попробуем внести изменение в характер их взаимодействия, не нарушая условия равновесия. На рисунке 4.2 показана возможная схема такого изменения.

Все внутренние взаимные связи между ячейками мы изменим на величину  $\Delta$  таким образом, чтоб суммарная стоимость перевозок минимизировалась. Другими словами, проведём минимизацию стоимости путём варьирования (изменения) величины  $\Delta$ . Для этого воспользуемся математическим пакетом Maple.

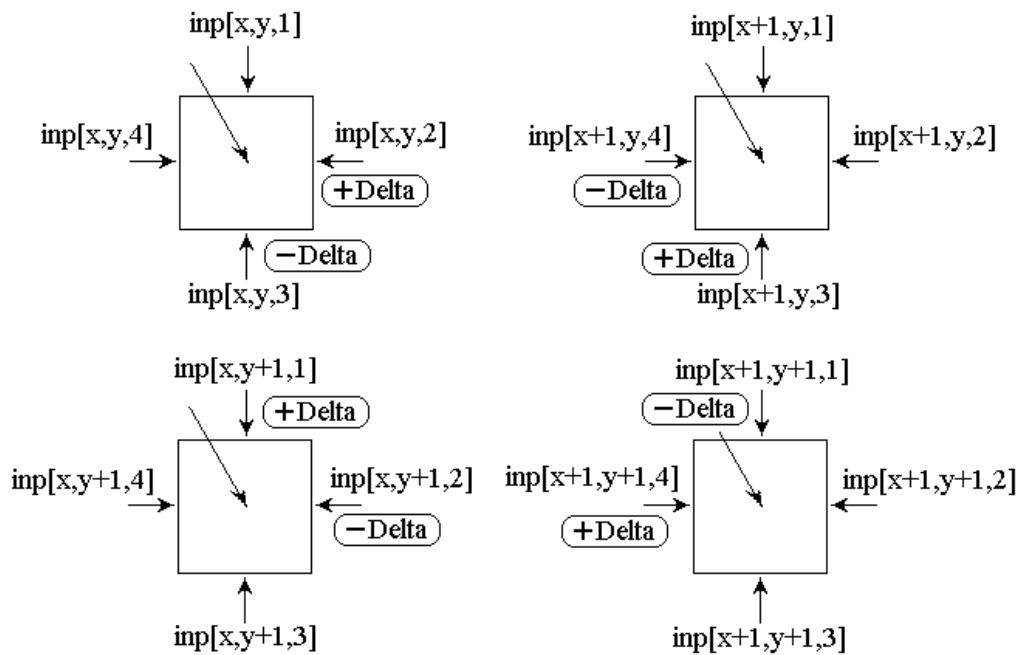


Рис. 4.2. Изменение взаимодействия соседних ячеек, при котором сохраняется условие равновесия.

Листинг работы в системе Maple.

```

> restart;
# Суммы квадратов потоков перевозок в ячейках
S00:=inp000^2+inp001^2+(inp002+Delta)^2+(inp003-
Delta)^2+inp004^2;
S10:=inp100^2+inp101^2+inp102^2+(inp103+Delta)^2+(inp104-
Delta)^2;
S01:=inp010^2+(inp011+Delta)^2+(inp012-
Delta)^2+inp013^2+inp014^2;
S11:=inp110^2+(inp111-
Delta)^2+inp112^2+inp113^2+(inp114+Delta)^2;

# Стоимости перевозок в отдельных ячейках
SP00:=S00*P00;
SP10:=S10*P10;
SP01:=S01*P01;
SP11:=S11*P11;

# Общая стоимость перевозок.
# Это та величина, которую мы будем минимизировать.
SP:=SP00+SP10+SP01+SP11;

# Соответствие модулей потоков, связывающих ячейки.
inp003:=-inp011;
inp103:=-inp111;
inp002:=-inp104;
inp012:=-inp114;

```

# Условие экстремума.

diff(SP,Delta)=0;

# Решаем уравнение и находим Delta.

solve(%,Delta);

```

S00 := inp0002 + inp0012 + (inp002 + Δ)2 + (inp003 - Δ)2 + inp0042
S10 := inp1002 + inp1012 + inp1022 + (inp103 + Δ)2 + (inp104 - Δ)2
S01 := inp0102 + (inp011 + Δ)2 + (inp012 - Δ)2 + inp0132 + inp0142
S11 := inp1102 + (inp111 - Δ)2 + inp1122 + inp1132 + (inp114 + Δ)2
SP00 := (inp0002 + inp0012 + (inp002 + Δ)2 + (inp003 - Δ)2 + inp0042) P00
SP10 := (inp1002 + inp1012 + inp1022 + (inp103 + Δ)2 + (inp104 - Δ)2) P10
SP01 := (inp0102 + (inp011 + Δ)2 + (inp012 - Δ)2 + inp0132 + inp0142) P01
SP11 := (inp1102 + (inp111 - Δ)2 + inp1122 + inp1132 + (inp114 + Δ)2) P11
SP := (inp0002 + inp0012 + (inp002 + Δ)2 + (inp003 - Δ)2 + inp0042) P00 + (inp1002 + inp1012 + inp1022
+ (inp103 + Δ)2 + (inp104 - Δ)2) P10 + (inp0102 + (inp011 + Δ)2 + (inp012 - Δ)2 + inp0132
+ inp0142) P01 + (inp1102 + (inp111 - Δ)2 + inp1122 + inp1132 + (inp114 + Δ)2) P11
inp003 := -inp011
inp103 := -inp111
inp002 := -inp104
inp012 := -inp114
(-2inp104 + 4Δ + 2inp011) P00 + (-2inp111 + 4Δ - 2inp104) P10 + (2inp011 + 4Δ + 2inp114) P01 +
-2inp111 + 4Δ + 2inp114) P11 = 0
1 / 2 * 1 / (P00 + P10 + P01 + P11) * (P00inp104 - P00inp011 + P10inp111 + P10inp104 - P01inp011 - P01inp114
+ P11inp111 - P11inp114)

```

Итак, с помощью системы Maple нашли оптимальное значение величины Delta для получения минимальной стоимости перевозок на территории четырёх соседних ячеек:

$$\begin{aligned}
Delta = & \frac{1}{2 \cdot (Price[x, y] + Price[x + 1, y] + Price[x, y + 1] + Price[x + 1, y + 1])} \cdot \\
& \cdot ( Price[x, y] \cdot (inp[x + 1, y, 4] - inp[x, y + 1, 1]) + \\
& + Price[x + 1, y] \cdot (inp[x + 1, y + 1, 1] + inp[x + 1, y, 4]) + \\
& - Price[x, y + 1] \cdot (inp[x, y + 1, 1] + inp[x + 1, y + 1, 4]) + \\
& + Price[x + 1, y + 1] \cdot (inp[x + 1, y + 1, 1] - inp[x + 1, y + 1, 4]) )
\end{aligned} \tag{4.1}$$

При таком изменении дельта решение оптимизируется для четырёх соседних ячеек. Многократно повторяя такую оптимизацию для различных малых групп матрицы транспортировок, мы добьёмся постепенной оптимизации матрицы в целом.

Отметим, что представленный метод был реализован в программе «Поиск оптимальных маршрутов» и показал себя надёжным, но медленным, требующим значительных затрат времени на проведение вычислений.

## ГЛАВА 5

### КОДИРОВАНИЕ ВХОДНЫХ ДАННЫХ В ФАЙЛЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Программа «Поиск оптимальных маршрутов» в качестве входных данных берёт информацию из изображения-карты, подготовленной заранее в редакторе Paint.

Предполагается, что каждое такое изображение содержит карту какой-то местности, характеристики которой закодированы с помощью RGB-составляющих цвета.

В программе принят следующий способ кодирования:

R (red) – используется для указания мощностей поставщиков;

G (green) – используется для описания цены перевозки в данном месте;

B (blue) – используется для кодирования мощностей потребителей.

Такой подход значительно облегчает процесс формирования входных данных, ведь для создания карт можно использовать популярные графические редакторы. Такая методика является хорошей заменой «старому доброму» составлению громоздких текстовых файлов с числовыми данными.

Итак, для создания карт местности можно использовать те графические редакторы, которые позволяют точно регулировать цвета по модели RGB. Одним из таких редакторов является Microsoft Paint, позволяющий задавать цвета с помощью инструмента «Изменение палитры» (рис. 5.1).

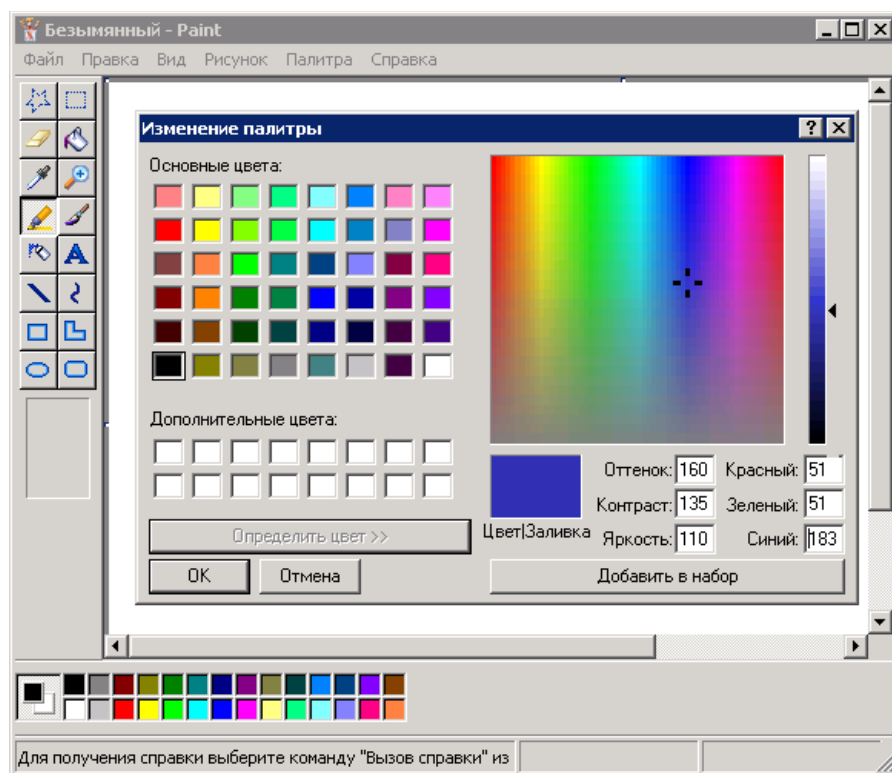


Рис. 5.1 Выбор цвета по модели RGB  
в редакторе Microsoft Paint.

В качестве характеристики пропускной способности места была использована *удельная стоимость перевозки* Price. В программе она вычисляется по формуле  $Price = 1.1^{255-G}$ . Таким образом величина Price принимает целые значения в диапазоне от 1 до 35903328718. Значение  $G=1$  соответствует самой высокой пропускной способности (низкой стоимости), значение  $G=256$  – самой низкой пропускной способности (высокой стоимости). Считается, что 256 различных значений Price вполне достаточно для описания различных дорожных и внедорожных условий перевозок. Таблица кодирования стоимости перевозки приведена на следующей странице.

Программа, представленные в данной работе, распознаёт изображения, сохранённые в растровом формате BMP (Bitmap Picture). При сохранении карт лучше выбирать режим «BMP 24-разряда (бита)».

Таблица кодирования стоимости перевозки Price с помощью градации зелёного цвета G.

255	1,00	191	445,79	127	198730	63	88592213
254	1,10	190	490,37	126	218603	62	97451434
253	1,21	189	539,41	125	240463	61	107196577
252	1,33	188	593,35	124	264509	60	117916235
251	1,46	187	652,68	123	290960	59	129707859
250	1,61	186	717,95	122	320056	58	142678644
249	1,77	185	789,75	121	352062	57	156946509
248	1,95	184	868,72	120	387268	56	172641160
247	2,14	183	955,59	119	425995	55	189905276
246	2,36	182	1051,15	118	468595	54	208895804
245	2,59	181	1156,27	117	515454	53	229785384
244	2,85	180	1271,90	116	567000	52	252763922
243	3,14	179	1399,08	115	623700	51	278040315
242	3,45	178	1538,99	114	686070	50	305844346
241	3,80	177	1692,89	113	754677	49	336428781
240	4,18	176	1862,18	112	830145	48	370071659
239	4,59	175	2048,40	111	913159	47	407078825
238	5,05	174	2253,24	110	1004475	46	447786708
237	5,56	173	2478,56	109	1104923	45	492565378
236	6,12	172	2726,42	108	1215415	44	541821916
235	6,73	171	2999,06	107	1336956	43	596004108
234	7,40	170	3298,97	106	1470652	42	655604519
233	8,14	169	3628,87	105	1617717	41	721164971
232	8,95	168	3991,75	104	1779489	40	793281468
231	9,85	167	4390,93	103	1957438	39	872609615
230	10,83	166	4830,02	102	2153182	38	959870576
229	11,92	165	5313,02	101	2368500	37	1055857634
228	13,11	164	5844,32	100	2605350	36	1161443397
227	14,42	163	6428,76	99	2865885	35	1277587737
226	15,86	162	7071,63	98	3152474	34	1405346511
225	17,45	161	7778,80	97	3467721	33	1545881162
224	19,19	160	8556,68	96	3814494	32	1700469278
223	21,11	159	9412,34	95	4195943	31	1870516206
222	23,23	158	10353,58	94	4615537	30	2057567827
221	25,55	157	11388,94	93	5077091	29	2263324610
220	28,10	156	12527,83	92	5584800	28	2489657071
219	30,91	155	13780,61	91	6143280	27	2738622778
218	34,00	154	15158,67	90	6757608	26	3012485056
217	37,40	153	16674,54	89	7433369	25	3313733561
216	41,14	152	18342,00	88	8176706	24	3645106918
215	45,26	151	20176,19	87	8994377	23	4009617609
214	49,79	150	22193,81	86	9893815	22	4410579370
213	54,76	149	24413,20	85	10883196	21	4851637308
212	60,24	148	26854,51	84	11971516	20	5336801038
211	66,26	147	29539,97	83	13168667	19	5870481142
210	72,89	146	32493,96	82	14485534	18	6457529257
209	80,18	145	35743,36	81	15934088	17	7103282182
208	88,20	144	39317,70	80	17527497	16	7813610400
207	97,02	143	43249,46	79	19280246	15	8594971441
206	106,72	142	47574,41	78	21208271	14	9454468585
205	117,39	141	52331,85	77	23329098	13	10399915443
204	129,13	140	57565,04	76	25662008	12	11439906988
203	142,04	139	63321,54	75	28228209	11	12583897686
202	156,25	138	69653,70	74	31051030	10	13842287455
201	171,87	137	76619,07	73	34156133	9	15226516201
200	189,06	136	84280,97	72	37571746	8	16749167821
199	207,97	135	92709,07	71	41328921	7	18424084603
198	228,76	134	101979,98	70	45461813	6	20266493063
197	251,64	133	112177,97	69	50007994	5	22293142370
196	276,80	132	123395,77	68	55008794	4	24522456607
195	304,48	131	135735,35	67	60509673	3	26974702267
194	334,93	130	149308,88	66	66560640	2	29672172494
193	368,42	129	164239,77	65	73216704	1	32639389743
192	405,27	128	180663,75	64	80538375	0	35903328718



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом выполнения данной работы стало создание программы «Поиск оптимальных маршрутов».

Программа выполнена в среде программирования Lazarus, являющейся свободным программным обеспечением. Этот факт сразу же отмечает возможные сомнения в легальности использования программных средств для её создания.

В данном труде разобран принцип работы программы. Рассмотрены примеры её использования.

Программа, работа которой описана в данной работе, может быть усовершенствована до более функциональной коммерческой версии, которая может быть использована менеджерами крупных компаний для организации оптимальной схемы перевозок грузов.

Среди очевидных плюсов программы следует отметить наглядный графический интерфейс, а также возможность сохранения этапов поиска оптимального решения в виде упорядоченного набора изображений.

Работа включает также примеры промежуточных расчётов с помощью математического пакета Maple.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ

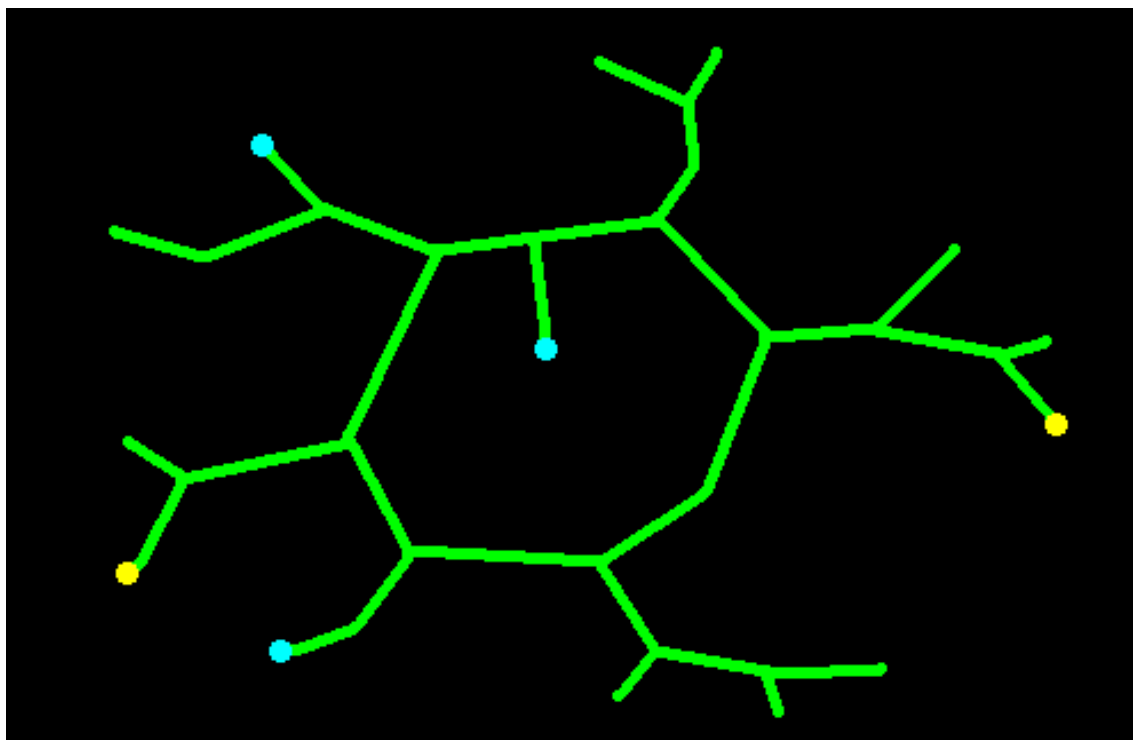


Рис. 6.1(а). Абстрактная схема дорог, рассматриваемая в качестве входных данных для программы «Поиск оптимальных маршрутов».

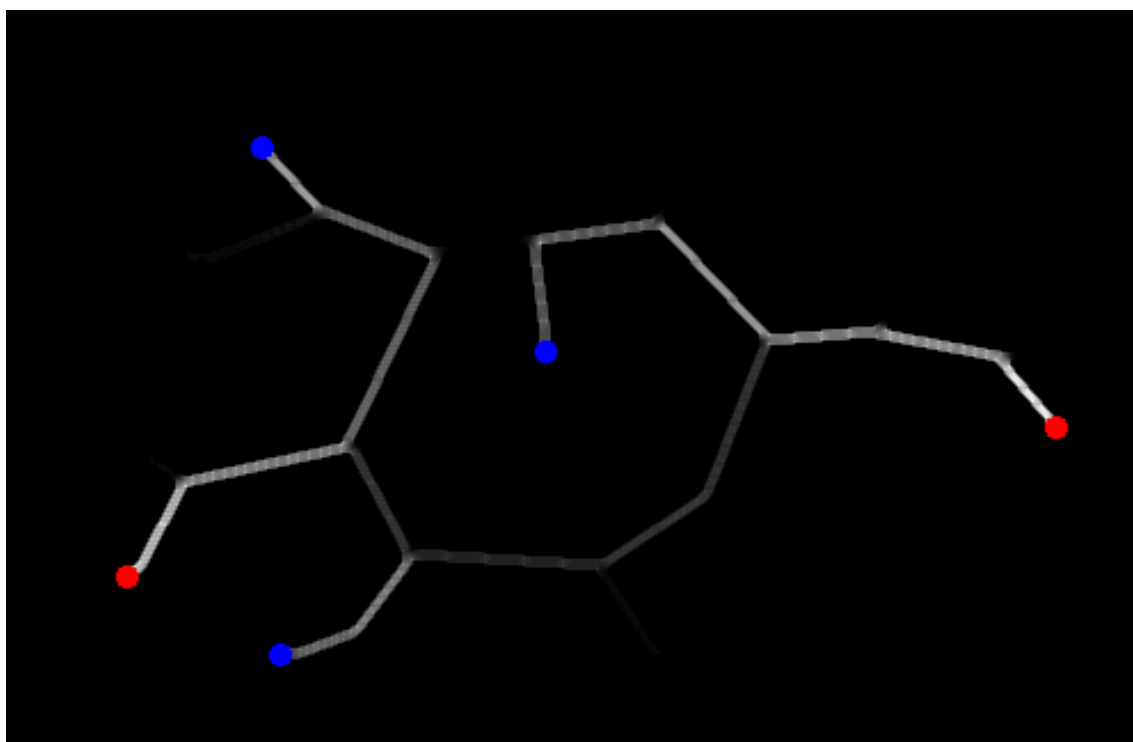


Рис. 6.1(б). Результат поиска оптимальной схемы перевозок. Ярко-белым цветом отмечены участки с наибольшей интенсивностью перевозок.

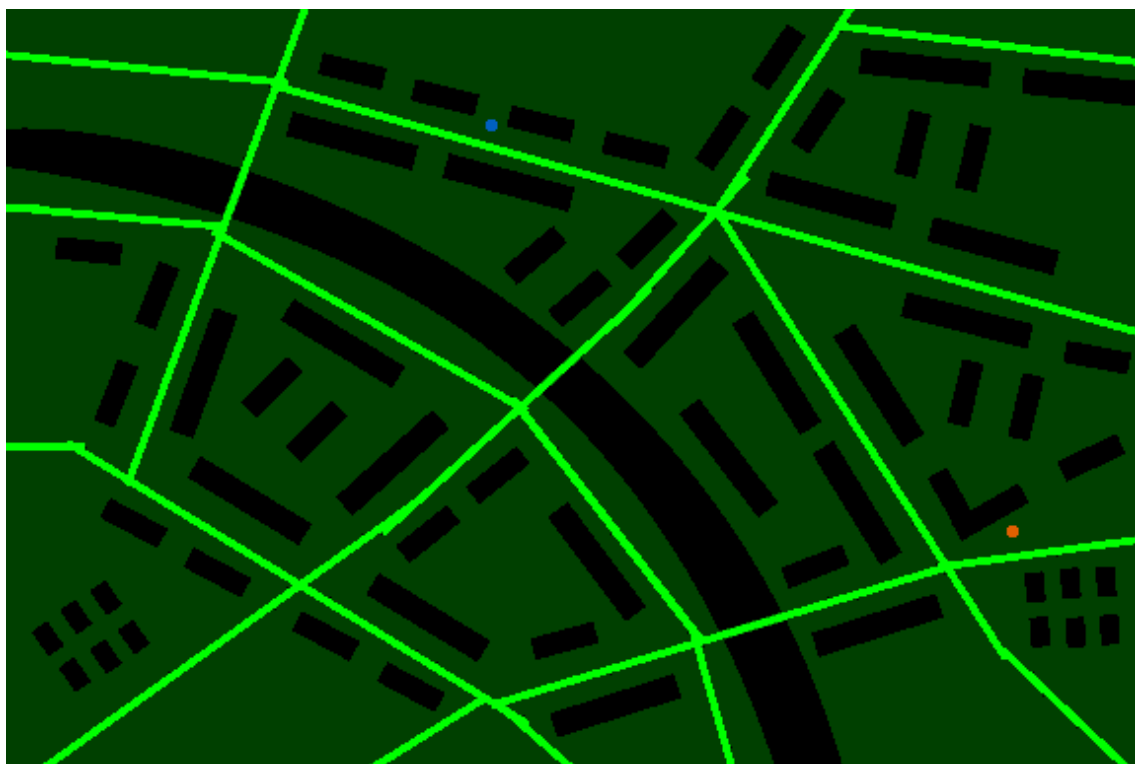


Рис. 6.2(а). Карта абстрактного микрорайона. Чёрным цветом обозначены постройки и участок реки, обладающие самой низкой пропускной способностью для автотранспорта. Ярко-зелёным цветом обозначены автомобильные дороги. На карте круглыми маркерами отмечены пункты: поставщик (оранжевый) и потребитель (голубоватый).

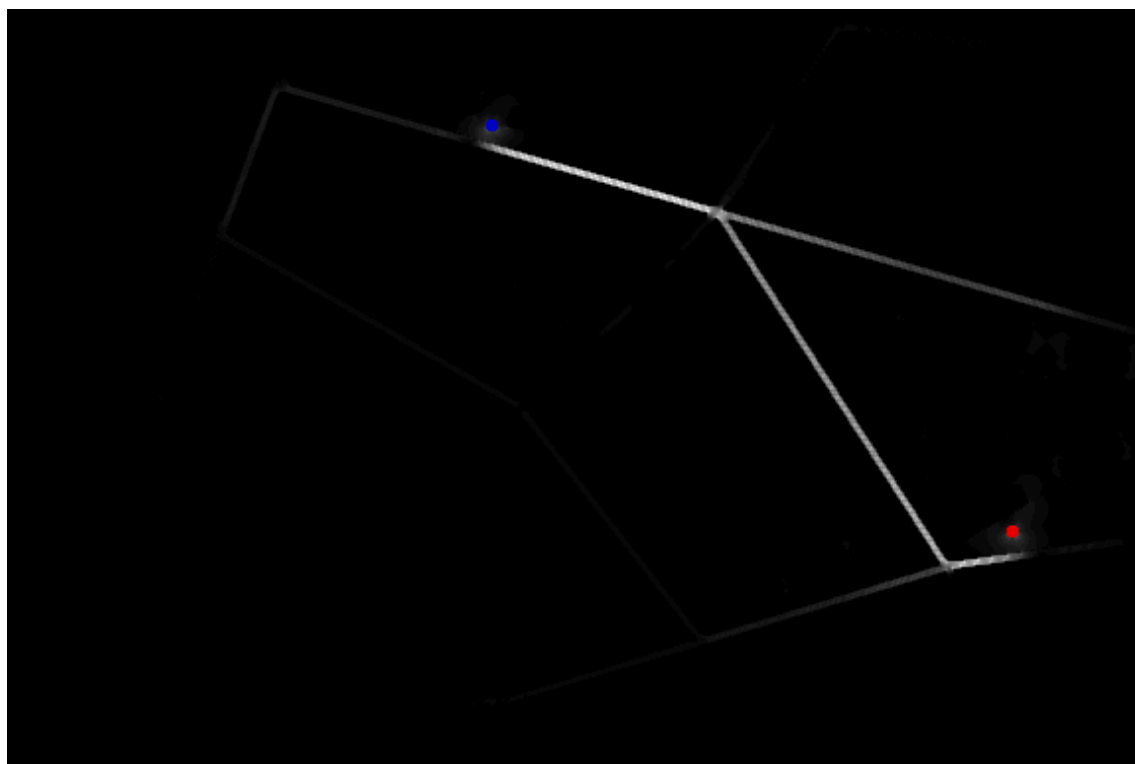


Рис. 6.2(б). Найденный оптимальный маршрут. Как видим, алгоритм поиска нуждается в доработке: слабо видны тусклые лишние линии.

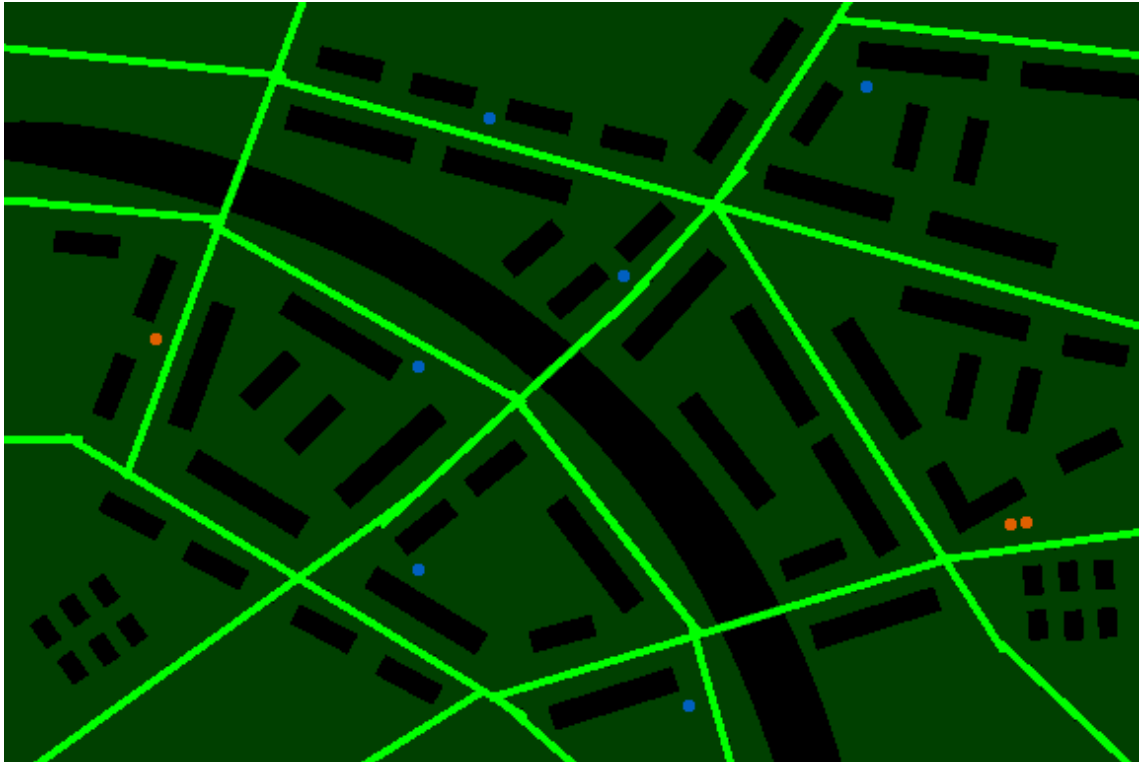


Рис. 6.3(а). Карта абстрактного микрорайона. На карте круглыми маркерами отмечены 6 потребителей и 3 поставщика. Вообще, двойные оранжевые кружки следует рассматривать как поставщика с удвоенной мощностью.

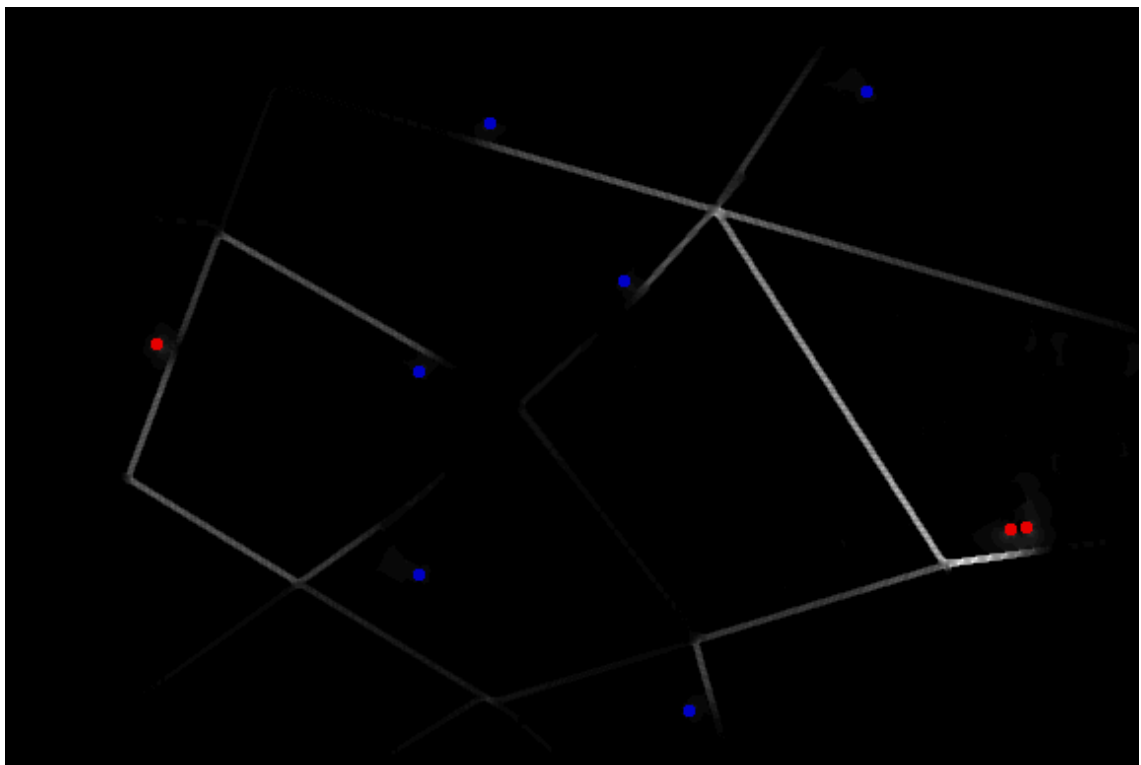


Рис. 6.3(б). Программа высветила оптимальные маршруты перевозок. Видим, что более мощному поставщику достались 4 потребителя, слабому – остальные 2 потребителя.

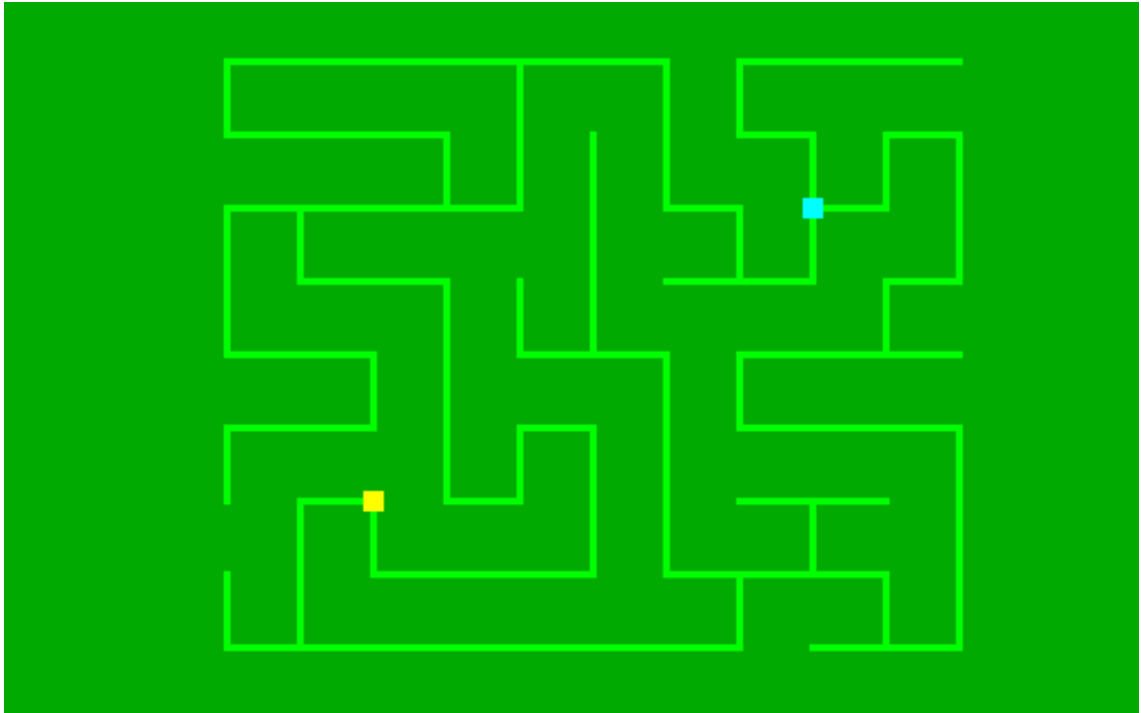


Рис. 6.4(а). Тестирование программы на карте лабиринта.

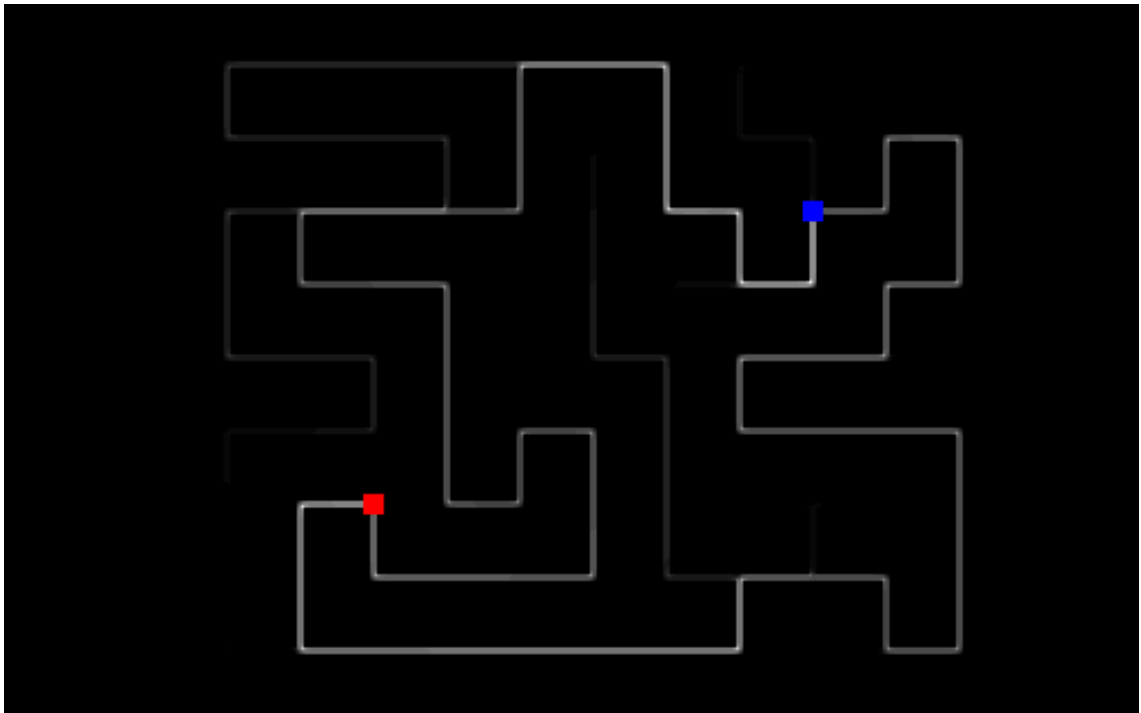


Рис. 6.4(б). И снова, программа ярко-белым цветом высвечивает рекомендуемые пути. Тёмно-серым затухающим цветом остались обозначены нерекомендуемые или тупиковые участки дороги.

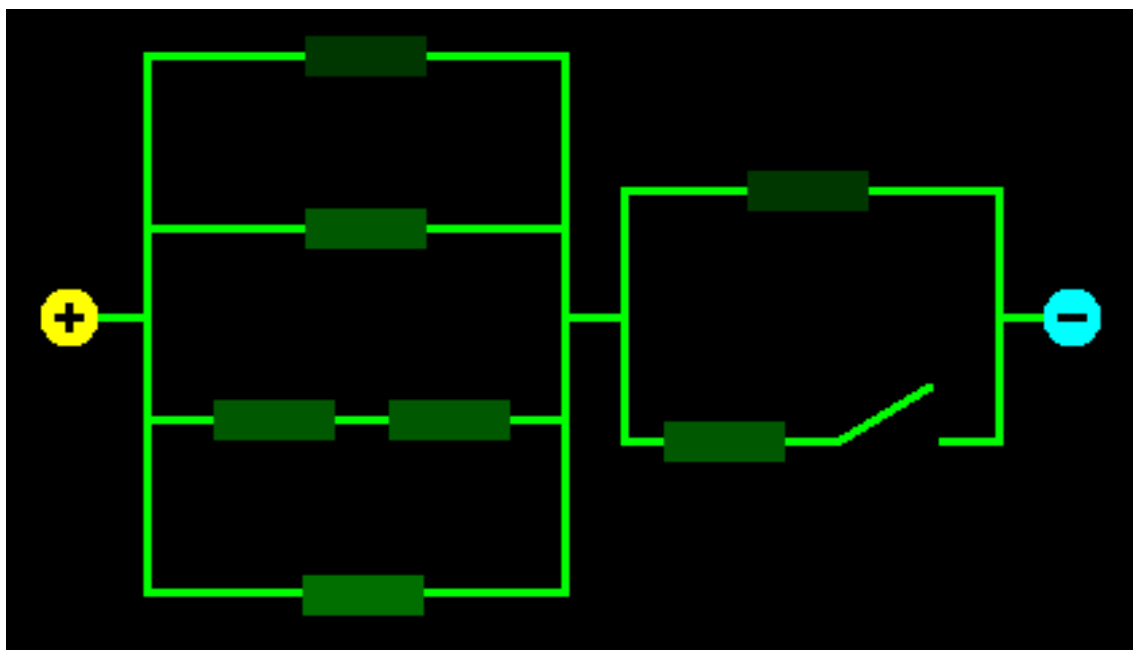


Рис. 6.5(а). Анализ электрической схемы. Поставщик (жёлтый маркер) и потребитель (голубой маркер) могут рассматриваться как источник и сток электрических зарядов. Зелёными прямоугольниками представлены резисторы различного сопротивления.

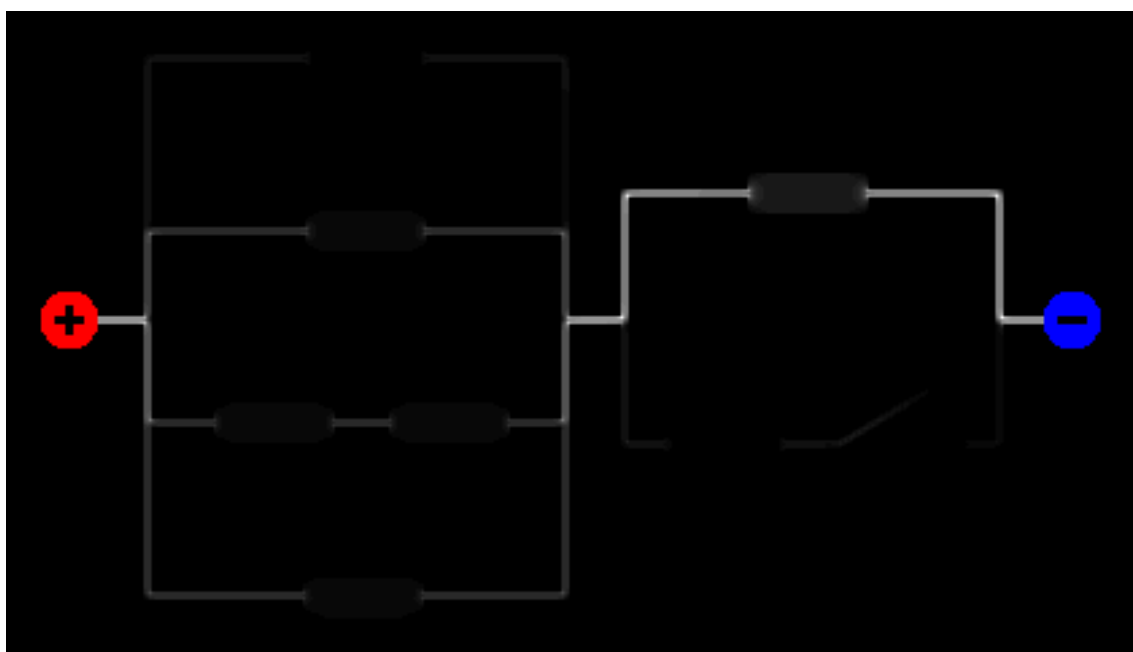


Рис. 6.5(б). Яркостью белого цвета представляется сила тока: в ярко-белых участках протекает более сильный ток, в тёмно-серых – слабый ток.



Рис. 6.6(а). Моделирование течения тока в неоднородной токопроводящей среде.

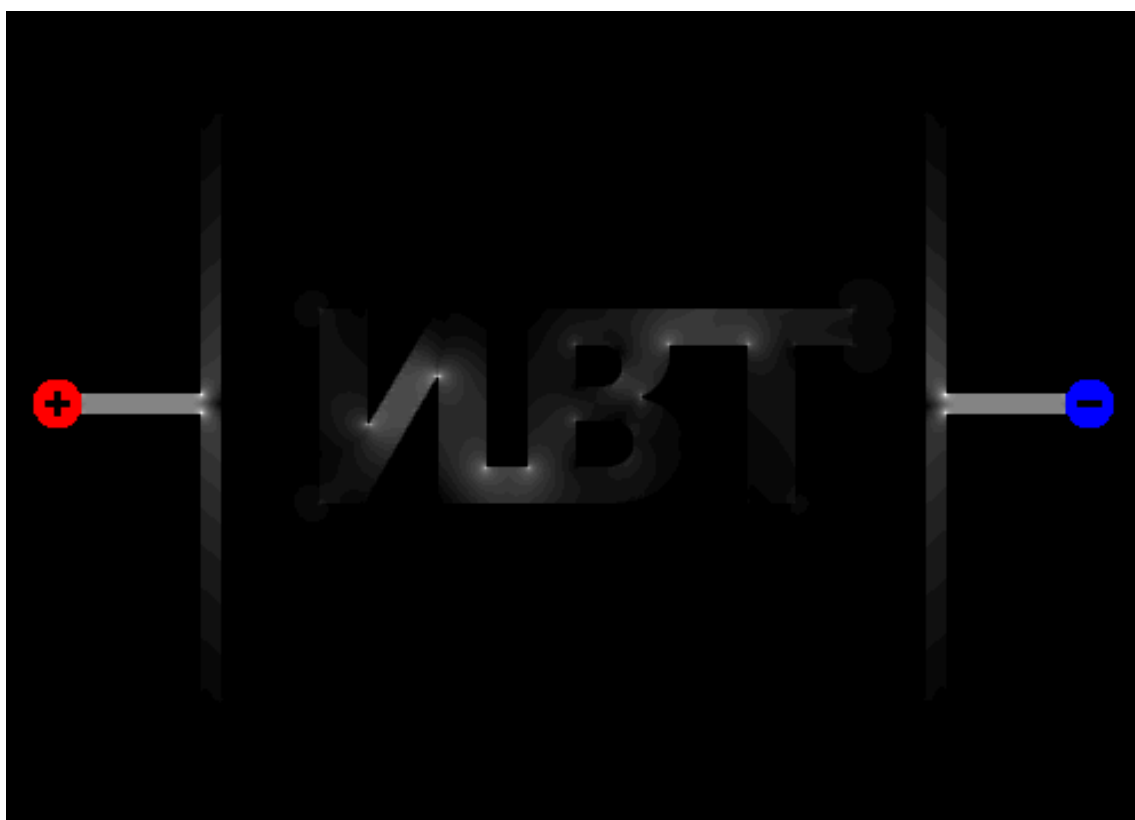


Рис. 6.6(б). Картина интенсивности движения электронов, полученная с помощью программы «Поиск оптимальных маршрутов».

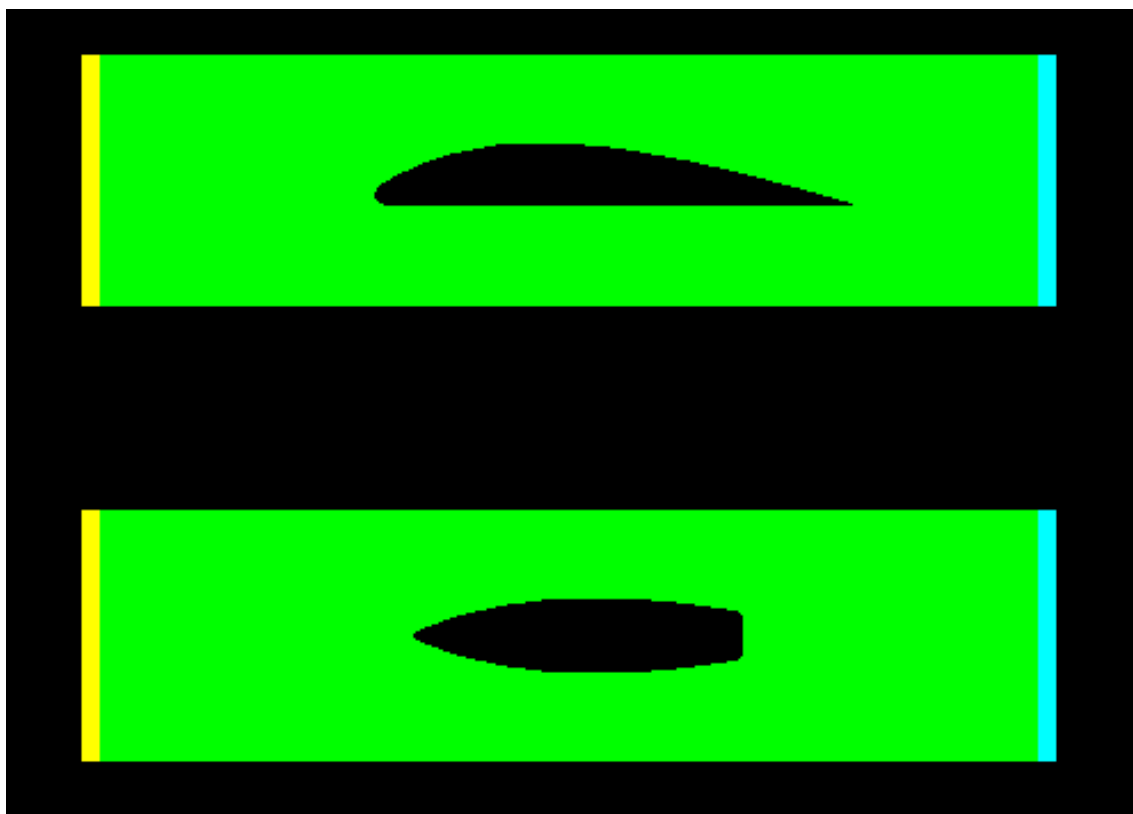


Рис. 6.7(а). Моделирование ламинарного (струйчатого) течения, при котором жидкость или газ перемещается слоями без перемешивания и пульсаций. Движение твердого тела в идеальной жидкости.

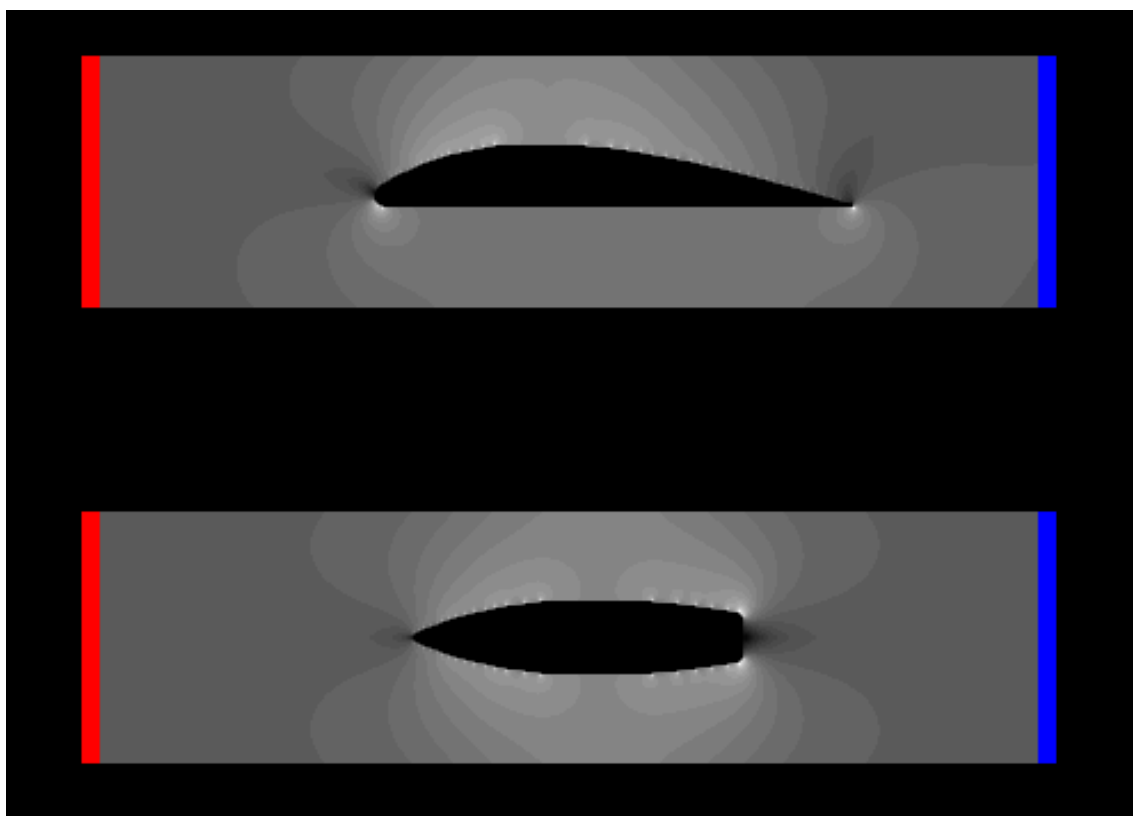


Рис. 6.7(б). Картины скоростей построенные программой могут быть интересны исследователям.